FARABI
Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
p-ISSN 2623-2332
e-ISSN 2798-5474

Analisis Penyelesaian Masalah Penugasan Pada Algoritma *Matching* Graf Bipartit Dan Metode Hungarian

Fajrul Hasnan Sani[1], Sawaluddin[2]
[1,2] Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sumatera Utara, Medan-Indonesia 20155
Email: [1]fajrul.hasnan@gmail.com, [2]sawal@usu.ac.id

ABSTRAK

Dalam dunia industri dapat dilihat bahwa untuk menempatkan karyawan dalam menyelesaikan permasalah tertentu pada bidang-bidang tertentu diperlukan penerapan dari masalah penugasan (Assignment Problem) agar diperoleh hasil yang optimal. Masalah penugasan sendiri merupakan masalah untuk memasangkan tepat satu untuk pekerja ke pekerjaan yang lain. Dalam hal ini penerapan proses penyelesaian dapat dilakukan menggunakan algoritma matching graf bipartit dan metode hungarian. Sehingga kedua metode ini mempunyai hubungan dalam sebuah aplikasi masalah penugasan di mana hasil dari kasus penerapan masalah penugasan memiliki solusi optimal yang sama yaitu bernilai 604.

Kata kunci: Graf Bipartit, Masalah Penugasan, Matching, Metode Hungarian, Optimal

ABSTRACT

In the industrial world, it can be seen that to place employees in solving certain problems in certain fields, it is necessary to apply the assignment problem in order to obtain optimal results. The assignment problem itself is a problem to match exactly one worker to another job. In this case, the application of the solution process can be done using the bipartit graph matching algorithm and the Hungarian method. So that these two methods have a relationship in an assignment problem application where the results of the assignment problem application case have the same optimal solution, which is worth 604.

Keywords: *Assignment Problem, Bipartit Graph, Hungarian Method, Matching, Optimal*

A. Pendahuluan

Dalam dunia bisnis dan industri, manajemen selalu mengahadapi pada masalah yang berkaitan dengan penugasan optimal dari pabrikan ataupun personel yang berbeda dengan tingkat efisiensi yang berbeda dan untuk tugas yang berbeda-beda. Untuk itu sangat penting rasanya masalah penugasan (*assignment problem*) dalam dunia bisnis agar hasil yang diperoleh tiap perusahan memiliki hasil atau kualitas yang optimal. Hal ini sangat penting dalam penempatan karyawan agar para pekerja dapat memanfaatkan sumber daya manusianya sebaik-baiknya dengan menempatkannya pada pekerjaan yang tepat dan berdampak keuntungan pada perusahaan. Penemapatan karyawan yang tidak sesuai akan membuat pemborosan terhadap waktu ataupun biaya produksi, sehingga hal ini tidak mendapatkan hasil optimal. Penempatan awal task-task ke dalam prosessor-prosessor, di mana biaya dari suatu tugas merupakan fungsi dari total waktu eksekusi dan total waktu komunikasi untuk mendapatkan tugas yang optimal yaitu, tugas yang diminimalkan fungsi dua biaya Venkateswaran (1993).

Dalam hal ini, bentuk penyelesaian masalah penugasan dapat dibagi dalam dua buah metode yaitu, *matching* graf bipartit dan metode hungarian. Graf digunakan untuk mengidentifikasi objek diskrit untuk memvisualisasikan masalah yang terjadi agar dapat mudah di pahami. Sering kali graf digunakan dalam kehidupan sehari-hari pada sebuah bentuk pemodelan karena penggunaan graf dapat diselesaikan dengan lebih sederhana. Secara umum graf *G* didefiniskan oleh sepasang himpunan (*V,E*) yang terdiri dari dua himpunan berhingga *V* dan *E*. Himpunan *V* adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*), himpunan *E* adalah himpunan sisi (*edges* atau *arsc*) yang menghubungkan sepasang simpul tersebut Harary F, (1969).

Karena bentuk penyelesaian masalah penugasan juga terdapat pada metode hungarian yang juga merupakan sebuah penyelesaian algoritma kombinasional untuk optimasi, di mana metode hungarian adalah komplekistas algoritma yang polinomial. Salah satu cara untuk menyelesaikan permasalahan metode hungarian dengan membangkitkan baris dan kolom dari matriks sampai nol unik muncul di setiap baris dan kolom yang dipilih sebagai alokasinya. Hal ini bertujuan untuk menetapkan pekerja dengan pekerjaan agar alokasi penugasan memperoleh nilai yang paling optimal.

Dari hal ini dapat dilihat bahwa kedua metode yang saling lepas tersebut memilik kesamaan penggunaan dalam contoh kasus masalah penugasan sehingga sangat menarik rasanya untuk dicari apakah kedua metode memang saling berhubungan. Dalam konteks penelitian ini merujuk pada perosalan masalah penugasan tak seimbang.

B. Metode Penelitian

1. Graf Matching

Matching merupakan permasalahan yang memasangkan pasangan tepat satu pada setiap elemen dalam sebuah himpunan dengan elemen yang lainnya. *Matching M* merupakan himpunan sisi sedemikian rupa sehingga kedua sisi *M* tidak bertemu di titik yang sama. Banyaknya *matching* yang ada pada suatu graf disebut kardinalitas matching, dan disimbolkan dengan $|M|$ Kocay dan Kreher (2005).

Matching maksimum adalah *matching* yang mempunyai jumlah bobot sisi yang maksimum. *M* disebut *matching* maksimum jika *G* tidak memuat matching *M'* yang lain dengan $|M'|\geq|M|$ Bondy dan Murty, (1976).

Matching sempurna apabila *matching* pada graf melibatkan semua titik pada graf *G* Chartrand dan Oellermann (1993).

1. Sampul *Saturated* sebuah simpul yang beririsan (*incident*) dengan sisi (garis) *matching M* Gondran dan Minoux (1984).

2. Simpul *unsaturated* sebuah simpul yang tidak beririsan (*incident*) dengan sisi (garis) *matching M* Gondran dan Minoux (1984).

1. Lintasan *alternating* sebuah lintasan pada graf yang sisi-sisinya bergantian antara *matching* dan bukan *matching*. Gondran dan Minoux (1984).

Gambar 1. Lintasan *Alternating*

2. Lintasan *augmenting* sebuah lintasan pada graf yang simpul awal dan simpul akhirnya merupakan simpul *unsaturated*.

Gambar 2. Lintasan *Augmenting*

2. Masalah Penugasan

Masalah penugasan adalah masalah yang spesifik yang diturunkan dari *linear programming* (Program Linear) dengan pengaturan untuk menyajikan masalah yang harus dipecahkan. Dalam *Linear Programming* (LP), terdapat 3 elemen utama yaitu variabel keputusan, fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Dalam hal ini permasalahan dapat diselesaikan dengan masalah penugasan adalah masalah maksimum dan minimal dengan sebuah asumsi bahwa $m = n$, sehingga akan terdapat $n!$ (*n* factorial) penuguasan dalam permasalahan karena berpasangan satu-satu Munkres (1957).

Adapun asumsi-asumi dalam masalah penugasan yang harus dipenuhi sebagai berikut:

1. Jumlah pekerja dan pekerjaan haruslah sama jika tidak maka harus ditambahkan dengan variabel *dummy*.
2. Suatu pekerja hanya ditugaskan kedalam satu pekerjaan saja.
3. Ada biaya C_{ij} yang dihubungkan oleh pekerja *i* ($i=1,2,3,\ldots,m$)
4. Menentukan bagaimana mengerjakan seluruh penugasan untuk meminimalkan dan maksimum.

Pada pemecahan masalah penugasan selalu dikaitkan dengan tabel ataupun matriks, pada umumnya baris berisikan pekerja yang ingin ditetapkan dan kolom terdiri dari pekerjaan yang ingin ditetapkan Hillier dan Gerald (1990).

Model dari masalah penugasan pada dapat ditulis secara matematis sebagai berikut Hillier (2008). Di mana fungsi tujuannya ialah

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{22}x_{22} + \cdots + C_{nm}x_{nm}$$

Dengan kendala sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0 \text{ atau } 1$$

Di mana untuk $i = (1,2,3,\ldots.,n)$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 0 \text{ atau } 1$$

Di mana untuk $j = (1,2,3,\ldots.,m)$

Dengan x_{ij} sebagai berikut.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ jika\ pekerja\ di\ i\ dibebankkan\ ke\ pekerjaan\ j \\ 0, \ jika\ pekerja\ di\ i\ tidak\ dibebankkan\ ke\ pekerjaan\ j \end{cases}$$

3. Algoritma Matching Maksimum untuk Graf Bipartit

Berikut merupakan langkah-langkah penyelesaian algoritma *matching* graf. Chartrand dan Oellerman (1993):

1. Langkah pertama adalah pelabelan simpul ℓ.
   1a. $\forall v \in V_1$, misal $\ell = max_u \in V_2 w(v,u)$.
   1b. $\forall u \in V_2$, misal $\ell = 0$.
   1c. H_ℓ adalah subgraf perentang dari G_ℓ dengan himpunan sisi E_ℓ.
   1d. Misal G_ℓ adalah graf dasar dari H_ℓ.
2. Pilih sembarang *matching* M di G_ℓ.
3. Jika pada G_ℓ terdapat *matching* maksimum, apakah G_ℓ merupakan *matching* sempurna. *Matching* sempurna tersebut adalah *matching* maksimum di G'_ℓ. Jika *matching* maksimum di G_ℓ bukan merupakan *matching* sempurna, maka harus disusun pohon *alternating* T yang berakar disimpul *unsaturated* untuk menentukan pelabelan simpul ℓ'. Selanjutnya ini langkah-langkah untuk menentukan pelabelan simpul ℓ'.
   3a. Pada setiap simpul di V_1 merupakan simpul *saturated* di M, maka M adalah *matching* maksimum di G dan proses berhenti. Jika tidak maka lanjutkan.
   3b. Seandainya x adalah simpul *unsaturated* di V_1.
   3c. Buatlah pohon *alternating* dari M yang berakar pada x. Jika pada lintasan *augmenting*-P terdapat di G_ℓ, maka ganti M dengan M' untuk *matching* baru. Jika tidak terdapat lintasan *augmenting* P, dan T adalah pohon *alternating* dari M dengan akar x yang tidak dapat diperluas lagi di G_ℓ, maka pelabelan simpul ℓ diganti dengan sebuah pelabelan simpul ℓ', dengan sifat bahwa M dan T termuat di graf dasar G_ℓ dari H_ℓ.
4. Menghitung pelabelan simpul ℓ'.
   Misalkan m_ℓ= minimal $\{\ell(v) + \ell(u) - w(v,u) | v \in V_1 \cap V(T)$ dan $u \in V_2 - V(T)\}$.
   4a. $\ell(x) - m_\ell$ untuk $v \in V_1 \cap V(T)$
   4b. $\ell(x) + m_\ell$ untuk $u \in V_2 \cap V(T)$
   4c. $\ell(v)$ untuk yang lainnya.
5. Jika pada pelabelan simpul ℓ' belum ada yang memuat semua simpul di V_1, maka harus diulang ke langkah 3.3.

4. Metode Hungarian

Metode hungarian berguna untuk menentukan penugasan pekerja ke pekerjaan tertentu secara satu persatu (*one by one*) Ndururu, Waruwu, & Yanny (2017). Dalam menyelesaikan persoalan metode hungarian untuk menyelesaikan masalah penugasan:

1. Identifikasi dan penyederhanaan masalah dalam bentuk matriks.
2. Tentukan nilai maksimum dari setiap baris, kemudian nilai terbesar dikurangkan dengan setiap entri baris.
3. Periksa setiap kolom dan baris telah terdapat nilai nol. Jika sudah, maka lanjutkan. Jika setiap baris dan kolomnya belum terdapat nilai nol maka nilai yang tidak memiliki elemen nol dikurangkan dengan nilai yang terkecil.
4. Tarik garis melalui baris dan kolom dengan nilai nol, pertama-tama pilih baris dan kolom dengan angka nol paling banyak untuk mendapatkan jumlah baris seminimal mungkin. Jika jumlah baris sudah sama dengan jumlah baris dan kolom matriks, tabel tersebut optimal. Jika tidak, lanjutkan ke langkah 6. Langkah ini disebut memeriksa optimalitas ketika garis cakupan kurang dari n – baris dan (n – kolom).
5. Kurangi semua nilai yang tidak tercakup oleh nilai yang lebih kecil dan tambahkan

nilai pada perpotongan garis dengan nilai yang lebih kecil.

6. Jika semua baris dan kolom dengan nilai nol dicakup oleh baris, tabelnya optimal.

C. Hasil dan Pembahasan

1. Pengolahan Data

Data dalam kasus yang sesuai dengan masalah penugasan diambil pada jurnal yang berjudul *A New Approach To Solve An Unbalanced Assignment Problem*. Kore B. G (2012).

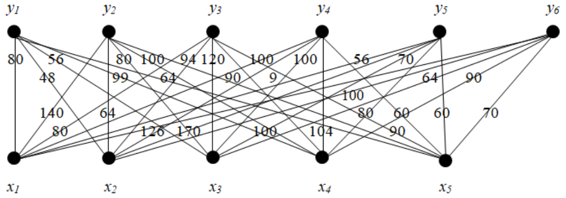
Tabel 1. Data Masalah Penugasan Karyawan di Perushasan

Pekerjaan / Pekerja	1	2	3	4	5	6
A	80	140	80	100	56	98
B	48	64	94	126	170	100
C	56	80	120	100	70	64
D	99	100	100	104	80	90
E	64	90	90	60	60	70

Di mana himpunan $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ menyatakan pekerja dan himpunan $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ menyatakan pekerjaan.

2. Algoritma *Matching* Graf Bipartit

Dalam melakukan pengerjaan pelakasanaan masalah penugasan maka harus dibuat terlebih dahulu variabelnya. Dalam hal ini sudah ditentukan bahwa $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ data masalah penugasan.



Gambar 3. Graf Bipartit Berbobot G Pada Masalah Penugasan

1. Langkah pertama adalah pelebelan simpul ℓ.

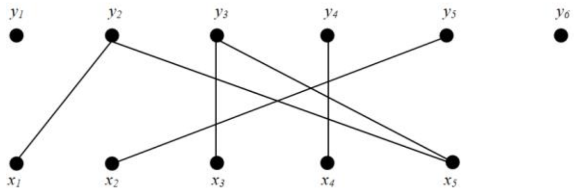
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 140 & 80 & 100 & 56 & 98 \\ 48 & 64 & 94 & 126 & 170 & 100 \\ 56 & 80 & 120 & 100 & 70 & 64 \\ 99 & 100 & 100 & 104 & 80 & 90 \\ 64 & 90 & 90 & 60 & 60 & 70 \end{bmatrix} \end{array}$$

1a. $\forall x \in V_1$, misal $\ell = max_y \in V_2 w(x, y)$
Sehingga diperoleh nilai $\ell(x) = (140, 170, 120, 104, 90)$

1b. $\forall y \in V_2$, misal $\ell = 0$
Sehingga nilai pelebelan $\ell(y) = (0,0,0,0,0,0)$

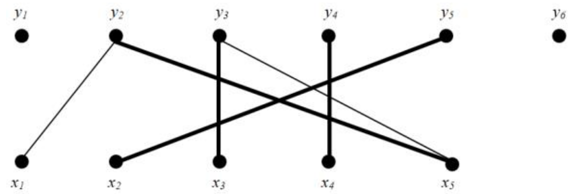
1c. H_ℓ adalah subgraf perentang dari G_ℓ dengan himpunan sisi E_ℓ

1d. Misal G_ℓ adalah graf dasar dari H_ℓ.



Gambar 4. *Equality* Subgraf di G_ℓ

2. Pilih sembarang *matching* M di G_ℓ
Misalkan dipilih *matching* M. $M_0 = (x_2, y_5), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_2)$



Gambar 5. Graf *Matching* M_0 di G_ℓ

3. Diperoleh *matching* maksimum di G_ℓ bukan *matching* sempurna. sehingga akan disusun pohon *alternating* T yang berakar di titik *unsaturated* menentukan pelabelan simpul ℓ'.

3a. Terdapat simpul V_1 merupakan sebuah simpul *unsaturated* di M, maka lanjutkan.

3b. Misal x simpul *unsaturated* di V_1, maka terdapat x_1 adalah sebuah simpul *unsaturated* sebagai simpul awal.

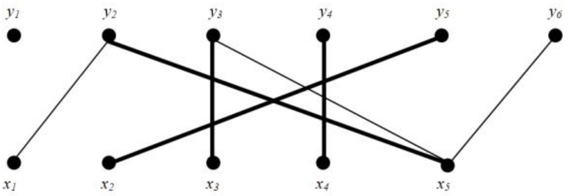
3c. Susun sebuah pohon *alternating* dari M yang berawal pada x_1. Diperoleh pohon *alternating T* di mana V(T) = {x_1, y_2, x_5}, dari hal ini tidak ditemukannya lintasan *augmenting* dan pohon *alternating T* dari M yang berawal x_1 tidak dapat diperluas lagi di G_ℓ. Sehingga pelebelan simpul ℓ diganti menjadi pelebelan simpul baru ℓ'.

4. Menghitung pelabelan simpul baru ℓ'
   m_ℓ = minimal $\{\ell(x)+\ell(y)-w(x,y) | x \in V_1 \cap V(T)$ dan $y \in V_2 - V(T)\}$ sehingga berlaku ℓ'
   4a. $\ell(x) - m_\ell$ untuk $x \in V_1 \cap V(T)$
   4b. $\ell(x) + m_\ell$ untuk $y \in V_2 \cap V(T)$
   4c. $\ell(x)$ untuk yang lainnya
   Anggota himpunan untuk $x \in V_1 \cap V(T)$ ialah {x_1,x_5} dan anggota himpunan $y \in V_2 \cap V(T)$ ialah {y_1, y_3, y_4, y_5, y_6}. Di mana $S = V_1 \cap V(T)$ Untuk perhitugan nilai $m_\ell = min_{x \in S, y \notin T}\ \ell(x)+\ell(y)-w(x,y)$ adalah sebagai berikut.

$m_\ell = \ell(x_1)+\ell(y_1)-w(x_1,y_1) = 140+0-80 = 60$
$m_\ell = \ell(x_1)+\ell(y_3)-w(x_1,y_3) = 140+0-80 = 60$
$m_\ell = \ell(x_1)+\ell(y_4)-w(x_1,y_4) = 140+0-100 = 40$
$m_\ell = \ell(x_1)+\ell(y_5)-w(x_1,y_5) = 140+0-56 = 84$
$m_\ell = \ell(x_1)+\ell(y_6)-w(x_1,y_6) = 140+0-98 = 42$
$m_\ell = \ell(x_5)+\ell(y_1)-w(x_5,y_1) = 90+0-64 = 24$
$m_\ell = \ell(x_5)+\ell(y_4)-w(x_5,y_4) = 90+0-60 = 20$
$m_\ell = \ell(x_5)+\ell(y_5)-w(x_5,y_5) = 90+0-60 = 30$
$m_\ell = \ell(x_5)+\ell(y_6)-w(x_5,y_6) = \mathbf{90+0-70=20}$

Sehingga diperoleh nilai dari $m_\ell = 20$ diperoleh dari sisi (x_5, y_6) nilai pelebelan ℓ' ialah sebagai berikut.

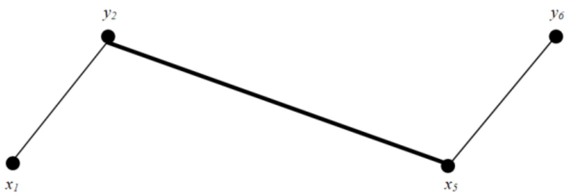
$$\ell' = \begin{cases} \ell(x) - m_\ell = \{120,170,120,104,70\} \text{ untuk } x \in V1 \cap V(T) \\ \ell(x) + m_\ell = \{0,20,0,0,0,0\} \text{ untuk } y \in V2 \cap V(T) \\ \ell(x) \text{ untuk yang lainnya} \end{cases}$$



Gambar 6. Matching M_0 dan Sisi m_ℓ

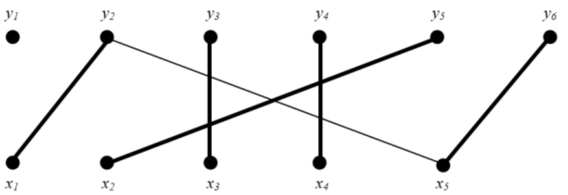
Karena pada pelebelan simpul ℓ' belum memuat simpul ℓ semua simpul di ℓ maka kembali ke langkah 3c.

3.c Susun sebuah pohon *alternating* dari M yang berawal pada x_1. Diperoleh sebuah pohon *alternating T* di mana $V(T)$ = {x_1, y_2, x_5, y_6}, dapat ditemukan sebuah lintasan *augmenting*-*M* yaitu P_0 = {(x_1,y_2), (x_5,y_2), (x_5,y_6)}. Sehingga lintasana augmenting P_0 dapat digunakan dalam pembentukan matching yang baru.



Gambar 7. Lintasan *Augmenting-M*

$M_1 = M_0 \otimes P_0$
M_1 = {(x_2,y_5), (x_3,y_3), (x_4,y_4), ~~(x_5,y_2)~~} $\otimes$ {(x_1,y_2), ~~(x_5,y_2)~~, (x_5,y_6)}
M_1 = {(x_1,y_2), (x_2,y_5), (x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_6)}



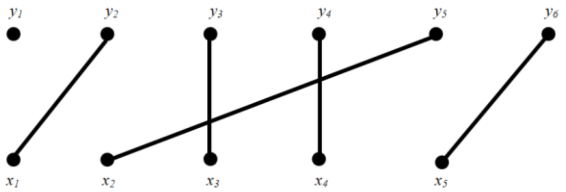
Gambar 8. *Matching* Maksimum M_1

Simpul V_1, sudah merupakan sebuah simpul yang *saturated*, ini berarti sebuah proses penyelesaian telah berhenti. Sehingga hasil dari graf *matching* tersebut merupakan sebuah penyelesaian dari masalah penugasan ini bisa juga disebut sebagai *matching* sempurna.

$Z = w(x_1,y_2) + w(x_2,y_5) + w(x_3,y_3) + w(x_4,y_4) + w(x_5,y_6)$
Z = 140 + 170 + 120 + 120 + 104 + 70
Z = 604

Dengan penempatan karyawannya pada masalah penugasan ialah sebagai berikut
Pekerja x_1 mengerjakaan pekerjaan pada y_2

Pekerja x_2 mengerjakaan pekerjaan pada y_5
Pekerja x_3 mengerjakaan pekerjaan pada y_3
Pekerja x_4 mengerjakaan pekerjaan pada y_4
Pekerja x_5 mengerjakaan pekerjaan pada y_6



Gambar 9. Solusi Penempatan Karyawan

3. Metode Hungarian

Pada data kasus permasalahan masalah penugasan yang ditampilkan terdapat 6 pekerjaan dan 5 pekerja maka harus ditmabahkan dengan variabel *dummy*.

Tabel 2. Masalah Penugasan Karyawan Dengan *Dummy*

Pekerjaan / Pekerja	1	2	3	4	5	6
A	80	140	80	100	56	98
B	48	64	94	126	170	100
C	56	80	120	100	70	64
D	99	100	100	104	80	90
E	64	90	90	60	60	70
Dummy	0	0	0	0	0	0

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah penugasan metode Hungarian sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi dan penyederhanaan masalah dalam bentuk matriks penugasan.

$$\begin{bmatrix} 80 & 140 & 80 & 100 & 56 & 98 \\ 48 & 64 & 94 & 126 & 170 & 100 \\ 56 & 80 & 120 & 100 & 70 & 64 \\ 99 & 100 & 100 & 104 & 80 & 90 \\ 64 & 90 & 90 & 60 & 60 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan nilai terbesar dari setiap baris dan kolom, kemudian mengurangkan nilai terbesar dengan setiap nilai dalam baris.

$$\begin{bmatrix} 80 & \mathbf{140} & 80 & 100 & 56 & 98 \\ 48 & 64 & 94 & 126 & \mathbf{170} & 100 \\ 56 & 80 & \mathbf{120} & 100 & 70 & 64 \\ 99 & 100 & 100 & \mathbf{104} & 80 & 90 \\ 64 & \mathbf{90} & \mathbf{90} & 60 & 60 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Mengkonfirmasi apakah setiap kolom telah mempunyai nilai nol.

$$\begin{bmatrix} 60 & \mathbf{0} & 60 & 40 & 84 & 42 \\ 122 & 106 & 76 & 44 & \mathbf{0} & 70 \\ 60 & 40 & \mathbf{0} & 20 & 50 & 56 \\ 5 & 4 & 4 & \mathbf{0} & 24 & 14 \\ 26 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 30 & 30 & 20 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Karena nilai pada matriks telah memiliki nilai nol maka akan ditarik garis.

4. Menarik garis pada baris atau kolom yang mempunyai nilai nol dengan cara memilih baris atau kolom yang memiliki nol.

$$\begin{bmatrix} 60 & \mathbf{0} & 60 & 40 & 84 & 42 \\ 122 & 106 & 76 & 44 & \mathbf{0} & 70 \\ 60 & 40 & \mathbf{0} & 20 & 50 & 56 \\ 5 & 4 & 4 & \mathbf{0} & 24 & 14 \\ 26 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 30 & 30 & \mathbf{20} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas banyaknya garis tidak sama dengan jumlah baris dan kolom maka dilanjukan ke Langkah berikutnya.

5. Nilai pada setiap baris dan kolom yang belum memiliki nilai nol dikurangkan dengan nilai terkecil. Pada matriks berikut ini nilai terkecilnya terdapat pada angka 20.

$$\begin{bmatrix} 60 & \mathbf{0} & 60 & 40 & 84 & 42 \\ 122 & 106 & 76 & 44 & \mathbf{0} & 70 \\ 60 & 40 & \mathbf{0} & 20 & 50 & 56 \\ 5 & 4 & 4 & \mathbf{0} & 24 & 14 \\ 26 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 30 & 30 & \mathbf{20} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Nilai terkecilnya dikurangkan untuk setiap nilai yang tidak digaris dan pada perpotongan garis tersebut ditambahkan dengan nilai terkecil yaitu 20.

$$\begin{bmatrix} 40 & \mathbf{0} & 60 & 20 & 64 & 22 \\ 122 & 126 & 96 & 44 & \mathbf{0} & 70 \\ 40 & 40 & \mathbf{0} & 0 & 30 & 36 \\ 5 & 24 & 24 & \mathbf{0} & 24 & 14 \\ 6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 10 & 10 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{20} & \mathbf{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Sehingga jumlah garis dan jumlah banyaknya baris dan kolom pada matriks sudah sama.

6. Jika jumlah baris dan kolom sudah sama dengan banyak garis, maka matriks sudah optimal.

$$\begin{bmatrix} 40 & \mathbf{0} & 60 & 20 & 64 & 22 \\ 122 & 126 & 96 & 44 & \mathbf{0} & 70 \\ 40 & 40 & \mathbf{0} & 0 & 30 & 36 \\ 5 & 24 & 24 & \mathbf{0} & 24 & 14 \\ 6 & 0 & 0 & 10 & 10 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai optimal dari permasalahan penugasan tersebut ialah yang memiliki nilai nol bertulis tebal.

Pada matriks tersebut maka diperoleh nilai optimalnya pada nilai matriks pada baris dan kolom yang dilingkarin

$$\begin{bmatrix} 80 & 140 & 80 & 100 & 56 & 98 \\ 48 & 64 & 94 & 126 & 170 & 100 \\ 56 & 80 & 120 & 100 & 70 & 64 \\ 99 & 100 & 100 & 104 & 80 & 90 \\ 64 & 90 & 90 & 60 & 60 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari tabel matriks tersebut diperoleh bahwa nilai optimal maksimumnya ialah

$Z = x_2 + x_5 + x_3 + x_4 + x_6 + x_1$

$Z = 140 + 170 + 120 + 104 + 70 + 0$

$Z = 604$

Sehingga nilai pada masalah penugasan memiliki optimal maksimumnya ialah 604. Penempatan yang lebih jelas dari pekerja ke pekerjaan dilihat pada table ini.

Tabel 3. Alokasi Solusi Optimal Dengan Metode Hungarian

Pekerja	Pekerjaan	Bobot
x_1	y_2	140
x_2	Y_5	170
x_3	y_3	120
x_4	y_4	104
x_5	y_6	70
Dummy	y_1	0
Total		604

Dengan penempatan pekerjanya pada masalah penugasan ialah sebagai berikut
Pekerja x_1 mengerjakaan pekerjaan pada y_2
Pekerja x_2 mengerjakaan pekerjaan pada y_5
Pekerja x_3 mengerjakaan pekerjaan pada y_3
Pekerja x_4 mengerjakaan pekerjaan pada y_4
Pekerja x_5 mengerjakaan pekerjaan pada y_6

Untuk variabel *Dummy* dapat dialokasikan ke pada variabel pekerjaan y_1, y_4 , y_5 dan y_6. Dikarenakan pekerja x_2 mengerjakaan pekerjaan pada y_5, pekerja x_4 mengerjakaan pekerjaan pada y_4 dan pekerja x_5 mengerjakaan pekerjaan pada y_6 sehingga variabel *Dummy* dapat pada pekerjaan y_1

Berdasarkan pengerjaan yang dilakukan maka diperoleh hasil bahwa kedua metode memiliki hasil maksimum yang optimal. Hasil optimal pada pengerjaan tersebut memliki nilai yang sama yaitu 604. Untuk kedua metode tersebut bisa digunakan kedalam sebuah permasalahan penugasan, karena dari hasil yang diperoleh keduanya mempunyai hasil yang sesuai dari kedua metode ini. Sehingga dapat dikatakan bahwa masalah penugasan dapat diselesaikan pada algoritma *matching* graf dan metode hungarian.

D. Kesimpulan dan Saran

1. Kesimpulan:

1. Berdasarkan penelitian, data pada masalah penugasan menghasilkan nilai optimal yang sama yaitu 604. Oleh karenanya, masalah penugasan (*Assigment Problem*) bisa diselesaikan pada algoritma *matching* graf bipartit dan metode hungarian.
2. *Matching* graf bipartit dan metode Hungarian mempunyai hubungan dalam penyelesaiaan persoalan masalah penugasan sehingga salah satu hal tersebut dapat digunakan dalam mencari nilai optimal untuk pemecahan permasalahan masalah penugasan.

E. Daftar Pustaka

Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications.* Mac Millan Press: New York.

Chartrand, Gary dan Oellermann, Ortrud. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory*. Mc Graw Hill International Edition: New York.

Gondran M, and Minoux, M. 1984. *Linear Algebra in Dioids: A Survey of Recent Results. In Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research*, Vol 95 of North-Hollad Math. Study,. North-Holland, Amsterdam.

Harary F, 1969 *Graph Teori.* Addison-Wesley Publish Company Inc, London.

Hillier, Fridrick S and Gerald J. Lieberman. 1990. *Introduction To Operations Research, Fifth Edition*, McGraw-Hill, Inc., USA

Hillier, S. F. & J. G. Lieberman. 2008. *Introduction To Operations Research (Edition 9)*. New York: Mc Graw-Hill, Inc.

Kocay, William dan Kreher, Donald. 2005. *Graph Theory and Optimization.* Chapman & Hall / CRC.

Kore. G,. 2012. *A New Approach To Solve An Unbalanced Assignment Problem*. International Journal of Physics and Mathematical Sciences. Vol 2 (1)

Munkres, J. 1957. *Algorithms for the Assignment and Transportation Problems*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 5(1):32-38.

Ndururu, E., Waruwu, F. T., & Yanny, A. 2017. *Alokasi Pekerja pada Suatu Proyek dengan metode Hungarian (Studi Kasus: PT Ira Widya Utama Medan)*. KOMIK (Konferensi Nasional Teknologi Informasi dan Komputer), Vol 1 (1).

Venkateswaran, R., Obranivic, Z., Raghavendra, C.S., 1993. *Cooperative Genetic for Optimization Problem in Distributed Computer System*. Technical report TR-EECS-93-018. School of EECS. Washington State University.