FARABI
Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
p-ISSN 2623-2332
e-ISSN 2798-5474

Analisis Pemetaan Isomorfisma Untuk Menentukan Dimensi Ruang Vektor $\mathcal{L}$

Siti Mico Handaru[1], I Made Arnawa[2], Helma[3]

[1]SMA Negeri 1 Payakumbuh, Sumatera Barat
[2]Universitas Andalas, Sumatera Barat
[3]Universitas Negeri Padang, Sumatera Barat

Email: [1]handarumicositi@gmail.com, [2]arnawa1963@gmail.com,
[3]helma_mat@fmipa.unp.ac.id

ABSTRAK

Dalam matematika, dimensi ruang vektor **V** dan **W** adalah jumlah vektor basis **V** dan **W**. Himpunan semua transformasi linier dari **V** ke **W** dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar menciptakan ruang vektor. Ruang vektor dari transformasi linier biasanya dilambangkan dengan **Ł (V,W). Ł (V,W)** ={T : **V** → **W** |Transformasi linier T}. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi vektor ruang **Ł (V,W)** melalui pemetaan isomorfisme. Peneliti melakukan studi pustaka untuk menentukan dimensi vektor ruang **Ł (V,W).** Penelitian menunjukkan bahwa ada pemetaan isomorfisme dari **Ł (V,W)** ke M_{mxn} Dapat disimpulkan bahwa **Ł** (**V**,**W**) = {T: **V** →W|Transformasi linier T} dengan vektor ruang **V** yang memiliki n dimention dan vektor spce W yang memiliki m dimention adalah vektor ruang dimensi terbatas. Dim (**Ł (V,W)**) dapat ditentukan dengan menunjukkan matriks standar M_{mxn} merupakan basis, sehingga dim(M_{mxn}) = mn. Jika **Ł (V,W)** ≅ M_{mxn} maka Dim (**Ł (V,W)**)= dim (M_{mxn})

Kata kunci: Pemetaan isomorfisme, Dimensi, Vektor ruang, Transformasi linier.

ABSTRACT

*In mathematics, the dimension of a vector space **V** and **W** is the number of vectors of a basis of **V** and **W**. The sets of all linier transformation from **V** to **W** with addition operation and scalar multiplication operations create a vector space. Vector space from linear transformations are usually denoted by **Ł (V,W)**. **Ł (V,W)** ={T : **V** → **W** |T linear transform-ation}. The purpose of this study was to determine space vector dimension **Ł (V,W)** through isomorphism mapping. The researcher conducted literature studies To determine space vector dimension **Ł (V,W)**. The study showed that there was a isomorphism mapping from **Ł (V,W)** to* M_{mxn}. *It can be concluded that **Ł (V,W)** = {T: **V** →W|T linear transformation} with space vector **V** which has* n *dimention and spce vector W which has* m *dimention are limited dimension space vectors. Dim (**Ł (V,W)**) can be determined by showing standar matrix of* M_{mxn} *constitute basis, so that dim(*M_{mxn}*) = mn. If **Ł (V,W)** ≅* M_{mxn} *then Dim (**Ł (V,W)**) = dim(*M_{mxn}*)*

***Keywords**: Isomorphism mapping, Dimension, Space vector, Linear transformation.*

A. PENDAHULUAN

Dimensi dari ruang vektor merupakan bagian penting dalam matematika. Suatu pemetaan isomorfisma dapat digunakan untuk menentukan dimensi dari ruang vector . Jika $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ adalah ruang vektor maka $\boldsymbol{T}$ merupakan suatu tranformasi linear sehingga $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$ dikatakan isomorfisma jika $\boldsymbol{T}$ satu-satu dan pada (into and onto). Jika $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$ suatu pemetaan isomorfisma maka dimensi $\boldsymbol{V}$ sama dengan dimensi $\boldsymbol{W}$. Dengan demikian dengan menggunakan pemetaan isomorfisma, dapat menentukan dimensi dari ruang vektor.

Dimensi merupakan parameter yang diperlukan untuk menggambarkan posisi dan sifat benda dalam ruang. Misalkan $\boldsymbol{V}$ adalah sebuah ruang vektor dan mempunyai basis dengan n elemen untuk n suatu bilang asli maka $\boldsymbol{V}$ dikatakan berdimensi n.

$\boldsymbol{V}$ dikatakan berdimensi n maka $\boldsymbol{V}$ mempunyai basis dengan n, hal ini terjadi jika $\boldsymbol{V}$ adalah sebuah ruang vektor. Jika $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ adalah dua ruang vektor pada lapangan F, maka himpunan semua transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar membentuk ruang vektor. Ruang vektor dari transformasi linear ini sering dinotasikan dengan $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$.

$\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} | T \text{ transformasi linear}\}$.

Berdasarkan uraian di atas penulis ingin membahas cara menentukan dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$.

Untuk menentukannya, penulis menggunakan pemetaan isomorfisma.

Misalkan $\boldsymbol{V}$ adalah ruang vektor, $\boldsymbol{u}$ adalah vektor di $\boldsymbol{V}$, dan k besaran skalar, maka $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ serta $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, maka k = 0 atau $\mathbf{u}$ = 0 (Anton, 1988). Jika $\boldsymbol{V}$ adalah sebarang vektor dan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ adalah himpunan vektor berhingga dalam $\boldsymbol{V}$, maka S disebut basis dari $\boldsymbol{V}$ jika S bebas linier dan S membentuk $\boldsymbol{V}$ (Anton, 1988). $\boldsymbol{V}$ adalah sebuah ruang vektor dan mempunyai basis dengan n elemen-elemen untuk n suatu bilangan asli maka dikatakan bahwa $\boldsymbol{V}$ berdimensi n (Jacob, 1990). Misalkan $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ adalah ruang vektor dengan dimensi berhingga dan $T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ serta T adalah isomorfisma, maka $\dim(\boldsymbol{V}) = \dim(\boldsymbol{W})$ (Jacob, 1990).

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}$ dengan pemetaan isomorfik. Semoga penelitian ini dapat menambah wawasan penulis dan pembaca pada umumnya tentang dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}$.

B. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode tinjauan pustaka dengan analisis teoritis terkait dengan permasalahan yang dibahas.

Dalam melakukan penelitian ini penulis mengawali dengan menelaah permasalahan, mengumpulkan dan menghubungkan teori-teori yang diperoleh dengan permasalahan yang ditemui untuk membantu dalam penyelesaiannya.

Proses yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah tersebut meliputi dua tahap. Tahap pertama mengumpulkan literature berupa buku dan sumber terkait masalah penelitian. Kemudian dikumpulkan, diurutkan , diklasifikasikan serta dikelompokkan, sebagai konsep-konsep landasan penelitian. Tahap kedua mengurutkan dan mengklasifikasikan seluruh konsep yang telah dikumpulkan, baru kemudian diilakukan analisis dengan menuliskan definisi dari Ruang Vektor, Bebas Linear, Membangun, Basis, Dimensi, Tranformasi Linear, Tranformasi Linear Satu-Satu, Tranformasi Linier Pada dan Isomorfisma.

Pengujian kebenaran pemetaan isomorfisma untuk menentukan dimensi dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$. dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Misalkan diberikan ruang vektor $\boldsymbol{V}$ yang berdimensi n dan ruang vektor $\boldsymbol{W}$ yang berdimensi m. Tunjukkan bahwa $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ suatu ruang vektor.
2. Tunjukkan bahwa matrik M yang berordo $m \times n$ adalah suatu ruang vektor atas F.
3. Tunjukkan bahwa ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ke M_{mxn} .
4. Tunjukkan bahwa
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right\}$$
sebanyak $m \cdot n$ merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .
5. Tunjukkan bahwa $\dim(M_{mxn}) = mn$

C. PEMBAHASAN

Penentuan dimensi $\mathfrak{L}$ melalui pemetaan isomorfisma harus memenuhi pembuktian bahwa $\mathfrak{L}$ merupakan ruang vektor, ruang vektor $\boldsymbol{M_{mxn}}$, Isomorfisma dari $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ke M_{mxn}, dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}$

Ruang Vektor $\mathfrak{L}$

Misalkan diberikan ruang vektor $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ yang berdimensi n dan m. Tunjukkan bahwa $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ merupakan ruang vektor.

Penyelesaian:

$\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \{T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} | T \text{ transformasi linier}\}$

Misalkan $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ adalah dua ruang vektor atas lapangan yang sama F. Misalkan T_1 dan T_2 adalah transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$. Maka fungsi $(T_1 + T_2)$ didefinisikan oleh

$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{V}$ adalah transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$.

Selanjutnya, jika $\boldsymbol{T}$ merupakan transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ maka untuk skalar α, fungsi $(\alpha \cdot T)$ didefinisikan $(\alpha \cdot T) = \alpha \cdot T(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{V}$ merupakan transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$.

Theorem 3.1. *Himpunan $\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}$) darisemua transformasi linear dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ bersamaan dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan bilangan scalar adalah ruang vektor atas lapanagn F.*

BUKTI. Misalkan T_1, T_2 adalah transformasi linear dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ dan $(T_1 + T_2)$ didefinisikan sebagaimana di atas. Selanjutnya $\forall x, y \in \boldsymbol{V}$ dan $\alpha, \beta \in F$.

$(T_1 + T_2)(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = T_1(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)$
$+ T_2(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)$
$= \alpha \cdot T_1(x) + \alpha \cdot T_2(x)$
$+\beta \cdot T_1(y) + \beta \cdot T_2(y)$

[dengan assosiatif dan komutatif penjumlahan dalam $\boldsymbol{W}$]

$= \alpha \cdot [T_1(x) + T_2(x)] + \beta \cdot [T_1(y) + T_2(y)]$
$= \alpha \cdot [(T_1 + T_2)(x)] + \beta \cdot [(T_1 + T_2)(y)]$

Dapat ditunjukkan bahwa $(T_1 + T_2)$ adalah suatu tranformasi linear.

Berikutnya, jika T adalah suatu transformasi linear, dan α adalah suatu skalar $\forall x, y \in \boldsymbol{V}$ dan $\beta, \gamma \in F$

$(\alpha \cdot T)(\beta \cdot x + \gamma \cdot y)$
$= \alpha \cdot [\beta \cdot T(x) + \gamma \cdot T(y)]$
[dengan sifat kelinearan pada T]
$= \alpha \cdot [\beta \cdot T(x)] + \alpha \cdot [\gamma \cdot T(y)]$
$= (\beta\alpha) \cdot T(x) + (\gamma\alpha) \cdot T(y)$
[dengan komutatif perkalian dalam F]
$= \beta \cdot [\alpha \cdot T(x)] + \gamma \cdot [\alpha \cdot T(y)]$
$= \beta \cdot [(\alpha \cdot T)(x)] + \gamma \cdot [(\alpha \cdot T)(y)]$

Menunjukkan bahwa (α . T) adalah sebuah transformasi linear. Sekarang dengan fakta bahwa himpunan $\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$) dari semua transformasi linier dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ merupakan ruang vektor dengan memperhatikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar di atas berdasarkan hal berikut:

(I) ($\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$), +) adalah sebuah grup abelian, karena

(i) $\forall T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ dan $\forall x \in \boldsymbol{V}$.

$\big((T_1 + T_2) + T_3\big)(x) = (T_1 + T_2)(x)$
$+T_3(x)$
$= T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$
[dengan assosiatif penjumlahan dalam $\boldsymbol{W}$]
$= T_1(x) + (T_2 + T_3)(x)$

$\{T_1 + T_2\} + T_3 = T_1 + \{T_2 + T_3\}$

Menunjukkan bahwa assosiatif penjumlahan dalam $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$

(ii) $\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ dan $\forall x \in \boldsymbol{V}$.

$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$
$= T_2(x) + T_1(x)$
[dengan komutatif penjumlahan F]

$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

Yang berarti bahwa komutatif penjumlahan dalam $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$

(iii) Transformasi nol disimbolkan dengan $\hat{0}$ dan didefinisikan dengan $\hat{0}(x) = 0$, $\forall$ x $\in \boldsymbol{V}$ dan bahwa

$(T + \hat{0}) = (\hat{0} + T) = T, \forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$

Oleh karena itu nol adalah ruang dari $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

(iv) Berkorespondensi untuk setiap $T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}), \exists(-T) \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$. didefinisikan dengan $(-T)(x) = -T(x), \forall x \in \boldsymbol{V}$ dengan $(-T)$ linear dan

$T + (-T) = (-T) + T = \hat{0}$

Sebuah transformasi linear $(-T)$ adalah invers penjumlahan dari T

(II) Operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar di atas berdasarkan hal berikut:

(i) $\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$; $x \in \boldsymbol{V}$ dan $\alpha \in F$.

$(\alpha \cdot (T_1 + T_2))(x) = \alpha \cdot (T_1 + T_2)(x)$
$= \alpha \cdot [T_1(x) + T_2(x)]$
$= \alpha \cdot T_1(x) + \alpha \cdot T_2(x)$
$= (\alpha \cdot T_1 + \alpha \cdot T_2)(x)$

Oleh karena itu:

$\alpha \cdot (T_1 + T_2) = \alpha \cdot T_1 + \alpha \cdot T_2$

Untuk setiap T_1 dan $T_2 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ dan $\alpha \in \boldsymbol{F}$

(ii) $\forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$; $x \in \boldsymbol{V}$ dan $\alpha, \beta \in F$;

$((\alpha+\beta)\cdot T)(x) = \alpha\cdot T(x)+\beta\cdot T(x)$
$= (\alpha \cdot T + \beta \cdot T)(x)$

Sehingga,

$(\alpha + \beta) . T = \alpha . T + \beta . T$
$\forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ dan $\alpha, \beta \in F$

(iii) $\forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$; $x \in \boldsymbol{V}$ dan $\alpha, \beta \in F$;

$\big((\alpha \cdot \beta) \cdot T\big)(x) = \alpha \cdot [\beta \cdot T(x)]$
$= \alpha \cdot [\beta . T(x)]$
$= (\alpha \cdot (\beta \cdot T)(x)$

Jadi, $(\alpha \cdot \beta) \cdot T = \alpha \cdot (\beta \cdot T)$,
$\forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ dan $\alpha, \in F$.

(iv) Jika 1 adalah identitas dari F, maka $\forall T \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$; $x \in \boldsymbol{V}$

$(1 \cdot T)(x) = 1 \cdot T(x)$
$= T(x)$
$1 . T = T$

∴ Teorema terbukti.

Contoh 3.2. Misalkan $H = \{T_1, T_2, T_3\}$, dengan T_1, T_2, dan T_3 adalah transformasi linear $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$ dan $H \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$. Misalkan α, β

adalah skalar. $T_1, T_2, \text{dan } T_3$ masing-masing didefinisikan dengan $T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix}$, $T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}$, dan $T_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\y\end{pmatrix}$
Apakah $\mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ adalah ruang vektor?
Jawab:
Misalkan $T_1, T_2, \text{dan } T_3$ adalah transformasi linear .
Maka fungsi (T_1 + T_2) didefinisikan dengan $(T_1+T_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ adalah transformasi linear dari $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$.

Juga, jika T adalah transformasi linear dari $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$ maka untuk skalar α, fungsi $(\alpha \cdot T)$ didefinisikan $(\alpha \cdot T) = \alpha \cdot T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ adalah transformasi linear dari $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$.

Himpunan $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dari seluruh transformasi linier dari $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$ serta operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar merupakan ruang vektor atas lapangan F jika memenuhi syarat-syarat berikut:

(I) ($\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$, +) adalah sebuah grup abelian, karena

(i) $\forall\, T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dan $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$.

$$((T_1+T_2)+T_3)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (T_1+T_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \left\{T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\} + T_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}x-y\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+x\\y+x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-y\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+x+x-y\\y+x+y+y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+(x+x-y)\\y+(x+y+y)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x+x-y\\x+y+y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-y\\y\end{pmatrix}\right\}$$

[dengan assosiatif penjumlahan dalam $\boldsymbol{W}$]

$$= T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \left\{T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \boldsymbol{T_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \left\{(T_2+T_3)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}$$
$$= (T_1 + (T_2+T_3))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Jadi $\{T_1 + T_2\} + T_3 = T_1 + \{T_2 + T_3\}$

Menunjukkan bahwa assosiatif penjumlahan dalam $\mathfrak{L}$

(ii) $\forall\, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dan $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$.

$$(T_1+T_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+x\\y+x+y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+x\\y+(x+y)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x+2x\\(x+y)+y\end{pmatrix}$$

[dengan komutatif penjumlahan]

$$= \begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix}$$
$$= T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= (T_2+T_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\therefore T_1 + T_2 = T_2 + T_1$$

Menunjukkan bahwa komutatif penjumlahan dalam $\mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$.

(iii) Transformasi nol disimbolkan dengan $\hat{0}$ dan didefinisikan dengan

$\hat{0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ dan bahwa

$$(T_1+\hat{0})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \hat{0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+0\\y+0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0+2x\\0+y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \hat{0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= (\hat{0}+T_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (*)$$

$$(T_1+\hat{0})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \hat{0}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x+0\\y+0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x\\y\end{pmatrix}$$
$$= T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (**)$$

Dari (*) dan (**), berlaku

$$(T_1+\hat{0})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (\hat{0}+T_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$
$$\forall\, T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathfrak{L}(R^2, R^2)$$

Jadi $T_1 + \hat{0} = \hat{0} + T_1 = T_1 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$

Oleh karena itu nol adalah vektor ruang dari $\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$.

(iv) Berkorespondensi $\forall\, T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$, $\exists(-T_1) \in \mathfrak{L}\,(R^2, \boldsymbol{R^2})$ didefinisikan dengan $(-T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$$= -\begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(-T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\therefore T_1 + (-T_1) = (-T_1) + T_1 = \hat{0}$$

Sebuah transformasi linear $(-T)$ adalah invers penjumlahan dari T

(II) Operasi penjumlahan dan perkalian dengan aljabar skalar di atas didasarkan pada:

(i) $\forall\, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ dan $\alpha \in F$.

$$(\alpha \cdot (T_1 + T_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot (T_1 + T_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \left[T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

$$= \alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}\right]$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x + x \\ y + (x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(2x + x) \\ \alpha(y + (x+y)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 2x + \alpha x \\ \alpha y + \alpha(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 2x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \cdot T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha \cdot T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\alpha \cdot T_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha \cdot T_1 + \alpha \cdot T_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu:

$\alpha \,.\, (T_1 + \boldsymbol{T_2}) = \boldsymbol{\alpha} \,.\, T_1 + \alpha \,.\, \boldsymbol{T_2}$

$\forall\, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dan $\alpha \in F$.

(i) $\forall\, T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ dan $\alpha, \beta \in F$;

$$((\alpha + \beta) \,.\, T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha + \beta) \cdot T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha + \beta) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 2x + \beta 2x \\ \alpha y + \beta y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 2x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta 2x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \cdot T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$(\alpha + \beta) \cdot T_1 = \alpha \cdot T_1 + \beta \cdot T_1, \forall T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dan $\alpha, \beta \in F$

(ii) $\forall T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$ dan $\alpha, \beta \in F$;

$$\left((\alpha \cdot \beta) \cdot T_1\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \cdot T_1$$

$$= (\alpha \cdot \beta) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta \cdot 2x \\ \beta \cdot y \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha \cdot \left[(\beta \cdot T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Jadi, $(\alpha.\beta).T_1 = \alpha\,.(\beta.T_1)$, $\forall\, T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dan $\alpha, \beta \in F$.

(iv) Jika 1 adalah identitas dari F, maka $\forall\, T_1 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^2}$

$$(1 \,.\, T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(1 \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(1 \cdot T_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot T_1 = T_1 \;, \quad \forall\, T_1 \in \mathfrak{L}.$$

Himpunan $\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ dari semua transformasi linear dari $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$ memenuhi syarat-syarat sehingga, $H = \{T_1, T_2, T_3\}$, dengan T_1, T_2, dan T_3 adalah transformasi linear $\boldsymbol{R^2}$ ke $\boldsymbol{R^2}$ dan $H \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$ adalah ruang vektor.

Ruang Vektor $\boldsymbol{M_{mxn}}$

Tunjukkan bahwa matriks M berordo $m \times n$ adalah suatu ruang vektor atas F.

Penyelesaian:

Ambil $B, C \in M_{mxn}$ dan $\alpha \in F$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

untuk $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mn}, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{mn} \in \boldsymbol{R}$. Didefinisikan opersai $+$ dan $\cdot$ di M_{mxn} sebagai berikut:

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ b_{21} + c_{21} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha B = \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{pmatrix}$$

M_{mxn} membentuk ruang vektor memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) Untuk $B, C, D \in M_{mxn}$

a. $B + C =$

$$\begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ b_{21} + c_{21} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

$\therefore\ B + C \in M_{mxn}$

b. $O + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + b_{11} & \cdots & 0 + b_{1n} \\ 0 + b_{21} & \cdots & 0 + b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 + b_{m1} & \cdots & 0 + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = B$$

c. $B + C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$+ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$B + C =$

$$\begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ b_{21} + c_{21} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

$C + B =$

$$\begin{pmatrix} c_{11} + b_{11} & \cdots & c_{1n} + b_{1n} \\ c_{21} + b_{21} & \cdots & c_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} + b_{m1} & \cdots & c_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$B + C = C + B$

$$B + (C + D) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} + d_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} + d_{1n} \\ b_{21} + c_{21} + d_{21} & \cdots & b_{2n} + c_{2n} + d_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} + d_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} + d_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11}+c_{11})+d_{11} \\ (b_{21}+c_{21})+d_{21} \\ \vdots \\ (b_{m1}+c_{m1})+d_{m1} \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \cdots & (b_{1n}+c_{1n})+d_{1n} \\ \cdots & (b_{2n}+c_{2n})+d_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & (b_{mn}+c_{mn})+d_{mn} \end{matrix}\Bigg)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & b_{m2}+c_{m2} \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ & \vdots \\ \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{matrix}\Bigg)$$

$$+\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

= (*B* + *C*) + *D*

(ii) Untuk semua B, $C \in M_{mxn}$ dan α, $\beta \in F$

a. $$\alpha B = \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \alpha B \in M_{mxn}$$

b. $$1 \cdot B = 1 \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = B$$

c. $$0 \cdot B = 0 \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$$

d. $$\alpha(B+C) =$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(b_{11}+c_{11}) & \cdots & \alpha(b_{1n}+c_{1n}) \\ \alpha(b_{21}+c_{21}) & \cdots & \alpha(b_{2n}+c_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha(b_{m1}+c_{m1}) & \cdots & \alpha(b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha b_{11}+\alpha c_{11} & \cdots & \alpha b_{1n}+\alpha c_{1n} \\ \alpha b_{21}+\alpha c_{21} & \cdots & \alpha b_{2n}+\alpha c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1}+\alpha c_{m1} & \cdots & \alpha b_{mn}+\alpha c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha c_{11} & \alpha c_{12} & \cdots & \alpha c_{1n} \\ \alpha c_{21} & \alpha c_{22} & \cdots & \alpha c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha c_{m1} & \alpha c_{m2} & \cdots & \alpha c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha B + \alpha C$$

e. $(\alpha+\beta)B$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)b_{11} & \cdots & (\alpha+\beta)b_{1n}\\ (\alpha+\beta)b_{21} & \cdots & (\alpha+\beta)b_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ (\alpha+\beta)b_{m1} & \cdots & (\alpha+\beta)b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha b_{11}+\beta b_{11} & \cdots & \alpha b_{1n}+\beta b_{1n}\\ \alpha b_{21}+\beta b_{21} & \cdots & \alpha b_{2n}+\beta b_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha b_{m1}+\beta b_{m1} & \cdots & \alpha b_{mn}+\beta b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n}\\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta b_{11} & \beta b_{12} & \cdots & \beta b_{1n}\\ \beta b_{21} & \beta b_{22} & \cdots & \beta b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta b_{m1} & \beta b_{m2} & \cdots & \beta b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\alpha B+\beta B$$

f. $\alpha(\beta B)$

$$=\alpha\left(\beta\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}\beta b_{11} & \beta b_{12} & \cdots & \beta b_{1n}\\ \beta b_{21} & \beta b_{22} & \cdots & \beta b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta b_{m1} & \beta b_{m2} & \cdots & \beta b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\beta b_{11} & \alpha\beta b_{12} & \cdots & \alpha\beta b_{1n}\\ \alpha\beta b_{21} & \alpha\beta b_{22} & \cdots & \alpha\beta b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha\beta b_{m1} & \alpha\beta b_{m2} & \cdots & \alpha\beta b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha\beta)b_{11} & \cdots & (\alpha\beta)b_{1n}\\ (\alpha\beta)b_{21} & \cdots & (\alpha\beta)b_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ (\alpha\beta)b_{m1} & \cdots & (\alpha\beta)b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha\beta)B$$

Syarat M_{mxn} untuk menjadi ruang vektor terpenuhi.

Isomorfisme dari $\mathfrak{L}$ ke M_{mxn}

Definisi 3.3. *(Jacob, 1990) mengatakan bahwa suatu transformasi linear* $T:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *dikatakan isomorfisma jika T satu-satu dan pada. Apabila terdapat isomorfisma* $T:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *dikatakan bahwa ruang vektor* $\boldsymbol{V}$ *dan* $\boldsymbol{W}$ *adalah isomorfik.*

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})\mapsto M_{mxn}$.

Misalkan $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ adalah ruang vektor atas lapangan F yang berdimensi n dan m, $\mathfrak{L}=\{T:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}|T \text{ transformasi linear}\}$ dan M_{mxn} adalah matriks mxn yang entri-entrinya adalah unsur-unsur di F maka tunjukkan bahwa $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ isomorfik dengan M_{mxn}.

Bukti:

Definisi pemetaan φ dari $\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ke M_{mxn} sebagai berikut:

$$\varphi:\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})\to M_{mxn}$$
$$T\mapsto[T]_{BC}$$

Tunjukkan (i) φ : linear
(ii) φ : satu-satu
(iii) φ : pada

(i) φ : linear.

Ambil $T_1,\ T_2\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ dan $\alpha\in F$

$B=\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$

$C=\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m\}$

B basis dari $\boldsymbol{V}$ dan C basis dari $\boldsymbol{W}$

Akan ditunjukkan

1. $\varphi(T_1+T_2)=\varphi(T_1)+\varphi(T_2)$
2. $\varphi(\alpha T_1)=\alpha\cdot\varphi(T_1)$.

1. $\varphi(T_1+T_2)=[T_1+T_2]_{BC}$

$$=\begin{bmatrix}[(T_1+T_2)(\boldsymbol{v}_1)]_C & \cdots & [(T_1+T_2)(\boldsymbol{v}_n)]_C\end{bmatrix}$$

$$=\left[[T_1(\boldsymbol{v}_1)+T_2(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \cdots \begin{bmatrix}T_1(\boldsymbol{v}_n)\\+T_2(\boldsymbol{v}_n)\end{bmatrix}_C\right]$$

$$=\begin{bmatrix}[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C+[T_2(\boldsymbol{v}_1)]_C & \cdots & [T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C+[T_2(\boldsymbol{v}_n)]_C\end{bmatrix}$$

$$=[[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \dots[T_2(\boldsymbol{v}_n)]_C]+[[T_2(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \dots\ [T_2(\boldsymbol{v}_n)]_C]$$

$$=[T_1]_{BC}+[T_2]_{BC}$$

$$=\varphi(T_1)+\varphi(T_2)$$

2. $\varphi(\alpha T_1)=[\alpha T_1]_{BC}$

$$=[[\alpha T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \dots\ [\alpha T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C]$$

$$=[\alpha[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \dots\ \alpha[T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C]$$

$$=\alpha[[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C\ \dots\ [T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C]$$

$$=\alpha[T_1]_{BC}$$

$$=\alpha\,\varphi(T_1).$$

(ii) φ : satu-satu

Ambil $T_1,\ T_2 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$

$B = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$

$C = \{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$

B basis dari $\boldsymbol{V}$ dan C basis dari $\boldsymbol{W}$

Akan ditunjukkan bahwa φ pemetaan satu-satu, yaitu jika $\boldsymbol{\varphi}\ (\boldsymbol{T_1}) = \boldsymbol{\varphi}\ (\boldsymbol{T_2})$ maka $T_1 = \ T_2$.

Perhatikan bahwa:

$$\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$$
$$[T_1]_{BC} = [T_2]_{BC}$$
$$[[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C \dots [T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C] = [[T_2(\boldsymbol{v}_1)]_C \dots [T_2(\boldsymbol{v}_n)]_C]$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks maka:

$[T_1(\boldsymbol{v}_1)]_C = [T_2(\boldsymbol{v}_1)]_C, \dots, [T_1(\boldsymbol{v}_n)]_C = [T_2(\boldsymbol{v}_n)]_C$

$$T_1(\boldsymbol{v}_1) = \ T_2(\boldsymbol{v}_1)$$
$$T_1(\boldsymbol{v}_2) = \ T_2(\boldsymbol{v}_2)$$
$$\vdots$$
$$T_1(\boldsymbol{v}_n) = \ T_2(\boldsymbol{v}_n)$$
$$\therefore T_1 = \ T_2$$

(iii) φ : pada

Akan ditunjukkan bahwa φ pemetaan pada, yaitu setiap $[T_1]_{BC} \in M_{mxn}$ terdapat $T_1 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ sehingga $\varphi(T_1) = [T_1]_{BC}$.

Ambil $[T_1]_{BC} \in M_{mxn}$ sebarang. Pilih $T_1 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$, maka $\varphi(T_1) = [T_1]_{BC}$.

Ini berarti φ merupakan pemetaan pada.

Berdasarkan langkah-langkah di atas, terbukti bahwa $\varphi : \mathfrak{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \rightarrow M_{mxn}$ dengan $T \mapsto [T]_{BC}$ merupakan pemetaan isomorfik. Basis M_{mxn}

Tunjukkan bahwa

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right\}$$

sebanyak $m \cdot n$ merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .

Penyelesaian:

$$M_{mxn} = \left\{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \boldsymbol{R}, i = 1,2,\dots,m\ dan\ j = 1,2,\dots n\right\}$$

$$X = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right\}$$

sebanyak $m \cdot n$

Tunjukkan bahwa X basis dari M_{mxn}

Pandang:

Bebas linear

$$r_1\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} + \cdots + r_{mn}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore r_1 = r_1 = \cdots = r_{mn} = 0$$

Membangun

Misalkan matriks A berordo $m\ x\ n$, maka

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} + \cdots + a_{mn}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Terbukti bahwa

$$X = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right\}$$

sebanyak $m \cdot n$ merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .

Dimensi M_{mxn}

Tunjukkan bahwa $\dim(M_{mxn}) = mn$

Bukti:

Pada pembahasan 4.3 telah dibuktikan bahwa ruang vektor matriks M_{mxn} yang terdiri dari seluruh matriks mxn, misalkan X_{ij} adalah matriks dengan elemen ke-ij 1 dan 0 di tempat lainnya, maka seluruh matriks seperti ini membentuk basis dari M_{mxn} yang disebut basis standar dari M_{mxn}. Dengan demikian, $\dim(M_{mxn}) = mn$.

Dimensi Ruang Vektor $\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$

Teorema 4.6.1 (Khanna, 1993)

Misalkan M_{mxn} adalah ruang vektor dari semua matrik mxn dan $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ adalah ruang vektor dari semua transformasi linear dari $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$ maka $\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \cong M_{mxn}$.

Bukti:

Definisi pemetaan φ dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ke M_{mxn} sebagai berikut:

$$\varphi : \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \to M_{mxn}$$

$$\varphi(T) = [T]_{BC}$$

Dengan $B = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$,

$C = \{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ adalah basis terurut dari $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$.

φ didefinisikan sebagai $[T]_{BC}$ yang ditentukan secara unik oleh T. Tidak sulit untuk mempelihatkan bahwa φadalah sebuah transformasi linear.

Misal:

$\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$ dengan T_1 , $T_2 \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$

$\Rightarrow [T_1]_{BC} = [T_2]_{BC}$

$\Rightarrow (a_{ij}) = (b_{ij})$

$\Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i, j

$\Rightarrow T_1(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\boldsymbol{w}_i$

$= \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\,\boldsymbol{w}_i = T_2(\boldsymbol{v}_j)$

untuk semua $j = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow T_1 = T_2$

$\Rightarrow$ φ adalah satu-satu.

Misal: $A = (a_{ij})_{mxn} \in M_{mxn}$, maka ada sebuah transformasi linear $T \in \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$.

$$T(\boldsymbol{v}_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\boldsymbol{w}_i$$

untuk semua $j = 1, 2, \dots, n$

$\therefore A = [T]_{BC} = \varphi(T) \Rightarrow \varphi$ adalah pada. $\therefore$ φ adalah sebuah isomorfisma sehingga $\mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \cong M_{mxn}$. Dengan demikian, $\dim \mathfrak{L}\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = mn$.

Berdasarkan menurut teorema 2.9.2 bagian (v) dapat disimpulkan bahwa jika ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ke M_{mxn} maka

dim ($\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$) = dim ($M_{mxn}$). Dengan demikian, untuk menentukan dimensi ruang vektor $\mathfrak{L}$ dengan $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ masing-masing berdimensi n dan m, adalah dengan menentukan dimensi M_{mxn}.

Untuk lebih jelasnya dapat diberikan beberapa contoh soal dan penyelesaian sebagai berikut:

Contoh 3.4. Tentukanlah dimensi dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R})$!

Penyelesaian:

Dim $((\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R}))$ = dim (M_{1x2}).

Untuk menentukan dim (M_{1x2}) akan ditunjukkan bahwa $\{(1\quad 0), (0\quad 1)\}$ merupakan basis dari ruang matriks M_{1x2}. $\{(1\quad 0), (0\quad 1)\}$ merupakan basis jika:

(i) Bebas linear

$r_1(1\quad 0) + r_2(0\quad 1) = (0\quad 0)$

$\therefore r_1 = 0, r_2 = 0$

(ii) Membangun

Misalkan A = $(a\quad b)$

$(a\quad b) = a(1\quad 0) + b(0\quad 1)$

Dari (i) dan (ii) maka $\{(1\quad 0), (0\quad 1)\}$ merupakan basis dari M_{1x2},

sehingga dim (M_{1x2}) = 2

$\therefore$ Dim $((\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R}))$ = dim (M_{1x2}) = 2

Contoh 3.5. Tentukanlah dimensi dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2})$!

Penyelesaian:

Dim $((\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2}))$ = dim (M_{2x2}).

Untuk menentukan dim (M_{2x2}) akan ditunjukkan bahwa

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

merupakan basis dari ruang matriks M_{2x2}.

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

merupakan basis jika:

(i) Bebas linear

$$r_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}O & 1\\0 & O\end{pmatrix} + r_3\begin{pmatrix}O & O\\1 & O\end{pmatrix} + r_4\begin{pmatrix}O & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = O$, dan $r_4 = 0$

(ii) Membangun

Misalkan A = $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \mathrm{b}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \mathrm{c}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \mathrm{d}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Dari (i) dan (ii) maka $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ merupakan basis dari M_{1x2}, sehingga dim (M_{2x2}) = 4

$\therefore$ Dim $((\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{R^2}))$ = dim (M_{2x2}) = 4

Contoh 3.6. Tentukanlah dimensi dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R^3}, \boldsymbol{R^2})$!

Penyelesaian:

Dim $((\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}))$ = dim (M_{2x3}).
Untuk menentukan dim (M_{2x2}) akan ditunjukkan bahwa
$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ dengan

$$X_1 = \begin{pmatrix}1 & O & O\\ O & O & O\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_5 = \begin{pmatrix}O & O & O\\ O & 1 & O\end{pmatrix}, X_6 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

merupakan basis dari ruang matriks M_{2x3}.
X merupakan basis jika:

(i) Bebas linear

$$r_1X_1 + r_2\,X_2 + r_3X_3 + r_4X_4$$
$$+r_5X_5 + r_6X_6 = \boldsymbol{0}$$
$$r_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \cdots + r_6\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore r_1 = 0$, $r_2 = O$, $r_3 = O$, $r_4 = O$, $r_5 = O$ dan $r_6 = O$

(ii) Membangun

Misalkan A = $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+d\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$+f\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dari (i) dan (ii) maka X merupakan basis dari M_{2x3}, sehingga dim (M_{2x3}) = 6
$\therefore$ Dim $((\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}))$ = dim (M_{2x3}) = 6

Contoh 3.7. Tentukanlah dimensi dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}})$!
Penyelesaian:
Dim $((\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}))$ = dim (M_{3x2}).
Untuk menentukan dim (M_{3x2}) akan ditunjukkan bahwa $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ dengan

$$X_1 = \begin{pmatrix}1 & O\\ 0 & 0\\ O & O\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ O & O\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix}O & O\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix}0 & O\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$X_6 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ merupakan basis dari ruang matriks M_{3x2}. X merupakan basis jika:

(i) Bebas linear

$$r_1X_1 + r_2\,X_2 + r_3X_3 + r_4X_4$$
$$+r_5X_5 + r_6X_6 = \boldsymbol{0}$$
$$r_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \cdots$$
$$+r_5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + r_6\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 = 0,$
$r_5 = 0$ dan $r_6 = 0$

(ii) Membangun

Misalkan $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+e\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dari (i) dan (ii) maka X merupakan basis dari M_{3x2}, sehingga dim (M_{3x2}) = 6
$\therefore$ Dim $((\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}))$ = dim (M_{3x2}) = 6

Contoh 3.8. Tentukanlah dimensi dari $\mathfrak{L}$ $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}})$!
Penyelesaian:
Dim $((\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}))$ = dim (M_{3x3}).
Untuk menentukan dim (M_{3x2}) akan ditunjukkan bahwa
$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9\}$ dengan

$$X_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ X_6 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_7 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, X_8 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ X_9 =$$

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ merupakan basis dari ruang matriks M_{3x3}. X merupakan basis jika:

(i) Bebas linear

$$r_1X_1 + r_2\,X_2 + r_3X_3 + r_4X_4$$
$$+r_5X_5 + r_6X_6 + r_7X_7 + r_8X_8 + r_9X_9 = \boldsymbol{0}$$
$$r_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\cdots+r_9\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r_1=0, r_2=0, r_3=0, r_4=0, r_5=0,$
$r_6=0, r_7=0, r_8=0$ dan $r_9=0$

(ii) Membangun

Misalkan $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}$

$$A=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$+d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$+f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$
$$+h\begin{pmatrix}0&0&0\\O&O&O\\0&1&0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Dari (i) dan (ii) maka X merupakan basis dari M_{3x3}, sehingga dim (M_{3x3}) = 9
$\therefore$ Dim (($\boldsymbol{R^3}, \boldsymbol{R^3}$)) = dim ($M_{3x3}$) = 9

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan yang dilakukan telah dibuktikan bahwa:

1. $\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$) merupakan suatu ruang vektor.
2. Matriks M meruapak ruang vektor atas F.
3. Ada suatu pemetaan isomorfisma dari $\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$) ke M_{mxn} .
4. $$\left\{\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right\}$$
   sebanyak $m\cdot n$ merupakan basis dari ruang vektor matriks M_{mxn} .
5. Dim$(M_{mxn})=mn$

Dengan terbuktinya lima hal di atas, maka dapat disimpulkan bahwa,
$\mathfrak{L}$($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$)= {$T$: $\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ |T transformasi linier } dengan $\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ ruang vektor masing-masing berdimensi n berdimensi m adalah ruang vektor yang berdimensi berhingga.

Dim ($\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$)) dapat ditentukan dengan menunjukkan bahwa matriks standar dari M_{mxn} merupakan basis, sehingga dim$(M_{mxn})=mn$.
Karena $\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$) $\cong M_{mxn}$ maka
Dim ($\mathfrak{L}$ ($\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$)) $= dim(M_{mxn})$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linier*. Bandung. Erlangga

Anton, H. An Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga

Cullen, Charles G.1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapan*. Jakarta: Gramedia.

Durbin, J. R. 2000. *Modern Algebra An Introduction Fourth Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc

Jacob, Bill. 1990. *Lnear Algebra*. New York: W. H. Freeman And Company.

Khan, Vijay K. 1993. *A Course In Abstract Algebra*. New Delhi: Vikas Publishing House PVT Ltd.

Lang, Serge. 2004. *Undergraduate Algebra*. New York: Springer.

Lay, David C. 2003. *Linear Algebra An Its Application*. New York: University of Maryland.

Novel, B And Daniel, J.W. 1998. *Applied Linear Algebra*. New Yersey: Prentice Hall.

Schoum's 2004 *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Stang, Gilbert. 1993 *Introduction To Linear Algebra*. Wellesley: Cambridge Press.