

Pelabelan Graceful Graf Hasil Korona Bunga Mawar

Elvi Khairunnisa¹, Dina Eka Nurvazly², Novi Permata Indah³

^{1,3}Prodi Teknik Mesin, FT, Universitas Singaperbangsa Karawang, Karawang-Indonesia 41361

²Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung-Indonesia 35141

Email: elvi.khairunnisa@ft.unsika.ac.id, dina.eka@fmipa.unila.ac.id, novi.permata@ft.unsika.ac.id

ABSTRAK

Terdapat banyak pelabelan graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan graceful. Pelabelan graceful dari graf $G = (V, E)$ dengan E busur dan V simpul adalah pelabelan yang memenuhi fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, |E|\}$ sedemikian sehingga label busur yang dihasilkan diperoleh dengan cara $|f(u) - f(v)|$ pada setiap busur uv berbeda secara berpasangan. Pada penelitian ini, kami membahas tentang pelabelan graceful graf hasil korona bunga mawar yaitu $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ untuk $r \geq 1$ dan $M(C_5) \odot \overline{K_r}$ untuk $r = 1, 2, 3$. Graf bunga mawar dikenal sebagai graf tengah dari graf lingkaran. Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah himpunan simpul dari graf lingkaran C_n , $n \geq 3$. Graf bunga mawar $M(C_n)$ dapat dibentuk dari graf lingkaran C_n dengan simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n simpul terisolasi $w_1, w_2, \dots, w_n$ dan kemudian menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dimana $v_{n+1} = v_1$. $M(C_n)$ memiliki n simpul dengan derajat 2 dan n simpul dengan derajat 4. Graf produk hasil korona bunga mawar yang dapat ditulis sebagai $M(C_n) \odot \overline{K_r}$ dibentuk oleh operasi korona pada graf bunga mawar $M(C_n)$, $n \geq 3$ dengan menambahkan r simpul daun pada setiap simpul.

Kata kunci: Graf bunga mawar, graf hasil korona bunga mawar, pelabelan graceful.

ABSTRACT

There are many graph labeling that have been developed, one of which is a graceful labeling. A graceful labeling of a graph $G = (V, E)$ with E edges and V vertices is an injective $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, |E|\}$ such that the resulting edge labels obtained by $|f(u) - f(v)|$ on each edges uv are pairwise distinct. In this research, we present graceful labeling of corona product of rose graph that is $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ for $r \geq 1$ and $M(C_5) \odot \overline{K_r}$ for $r = 1, 2, 3$. The rose graph is also known as a middle graph of a cycle. Let $v_1, v_2, \dots, v_n$ be the vertices of the cycle C_n , $n \geq 3$. The rose graph $M(C_n)$ can be constructed from the cycle C_n with vertices $v_1, v_2, \dots, v_n$ and n isolated vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$ and then connecting every two vertices v_i, v_{i+1} with w_i for $i = 1, 2, \dots, n$ where $v_{n+1} = v_1$. $M(C_n)$ contains n vertices of degree 2 and n vertices of degree 4. The rose corona graph that can written as $M(C_n) \odot \overline{K_r}$ formed by corona operations on rose graph $M(C_n)$, $n \geq 3$ by adding r leaf vertices on each vertex.

Keywords: Rose graph, corona product of rose graph, graceful labeling.

A. Pendahuluan

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan berurutan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tidak berurutan dari elemen-elemen V . Elemen-elemen V disebut simpul dari graf G yang dapat ditulis dengan $V(G)$ dan elemen-elemen E disebut busur dari graf G yang dapat ditulis dengan $E(G)$. Banyaknya simpul dari V dinotasikan dengan p atau $|V|$ dan banyaknya busur dari E dinotasikan dengan q atau $|E|$. Pada umumnya, simpul

digambarkan sebagai titik, sedangkan busur digambarkan sebagai garis lurus atau kurva. Apabila terdapat simpul x dan y dari graf G , dikatakan bertetangga (*adjacent*) terhadap y apabila terdapat sebuah busur antara x dan y , dinotasikan dengan xy (Hartsfield & Ringel, 2003).

Definisi 2

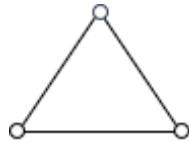
Setiap busur $\{u, v\}$ dari graf G biasanya dinotasikan dengan uv atau vu . Apabila terdapat sebuah busur $e = uv$ pada graf G , maka e dikatakan menghubungkan (*join*) u dan v . Busur uv disebut hadir (*incident*) satu

dengan lainnya. Derajat (*degree*) dari sebuah simpul v dari graf G adalah banyak busur yang hadir pada simpul v . Simpul yang mempunyai derajat 1 disebut simpul akhir (*end-vertex*) atau simpul daun (*leaf*) (Chartrand et al., 2011).

Definisi 3

Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n adalah graf dengan n simpul dinotasikan dengan $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ dan busurnya dinotasikan dengan $x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_0$ (Hartsfield & Ringel, 2003).

Ilustrasi gambar dari graf lingkaran yaitu graf C_3 direpresentasikan dengan Gambar 1.



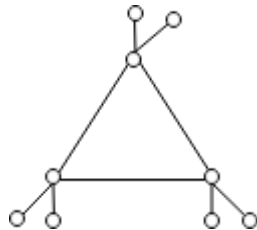
Gambar 1. Graf Lingkaran C_3

Terdapat operasi yang dapat dilakukan antar graf, salah satunya adalah operasi hasil korona.

Definisi 4

Misalkan terdapat dua graf G dan H dengan jumlah simpul masing-masing adalah n_1 dan n_2 . Produk hasil korona dari $G \odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dihasilkan dari dua graf yaitu G dan H dengan mengambil satu salinan dari G dan n_1 salinan dari H , dan menghubungkannya dengan suatu busur dari setiap simpul pada salinan ke- i dari H dengan simpul ke- i dari G (Yero et al., 2012).

Ilustrasi gambar dari graf produk hasil korona yaitu graf $C_3 \odot \overline{K_2}$ direpresentasikan dengan Gambar 2.

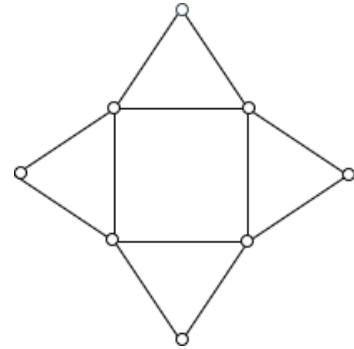


Gambar 2. Graf Korona $C_3 \odot \overline{K_2}$

Definisi 5

Graf bunga mawar dikenal sebagai graf tengah dari graf lingkaran. Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah himpunan simpul dari graf lingkaran C_n , $n \geq 3$ dan misalkan n sisi dari C_n adalah $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Graf bunga mawar $M(C_n)$ dapat dibentuk dari graf lingkaran C_n dengan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n titik terisolasi (*isolated vertices*) $w_1, w_2, \dots, w_n$ dan kemudian menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dimana $v_{n+1} = v_1$. $M(C_n)$ memiliki n simpul dengan derajat 2 dan n simpul dengan derajat 4 (Sugeng et al., 2023)

Ilustrasi gambar dari graf bunga mawar yaitu graf $M(C_4)$ direpresentasikan dengan Gambar 3.



Gambar 3. Graf Bunga Mawar $M(C_4)$

Definisi 6

Pelabelan *graceful* didefinisikan sebagai pemberian label pada simpul suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian sehingga setiap busur xy di G mendapat label $|f(x) - f(y)|$, maka label setiap busur akan berbeda (Gallian, 2017).

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengacu pada sumber-sumber pustaka teori graf dan dengan mempelajari karya-karya ilmiah dari hasil penelitian para pakar, baik yang disajikan pada seminar maupun yang telah dimuat di dalam situs *website*, jurnal ataupun buku yang berkaitan.

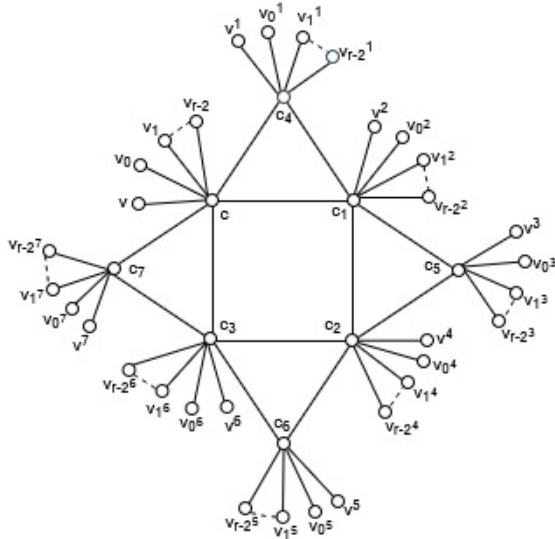
C. Hasil dan Pembahasan

Teorema 1

Graf hasil korona bunga mawar $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ memiliki pelabelan graceful untuk $r \geq 1$.

Bukti:

Misalkan notasi simpul graf hasil korona bunga mawar $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Penamaan Simpul
Graf $M(C_4) \odot \overline{K_r}$

Pada Gambar 4 di atas terlihat bahwa himpunan simpul

$$V(M(C_4) \odot \overline{K_r}) = \{c, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7,$$

$$v, v_0, v_1, \dots, v_{r-2}, v^1, v_0^1, v_1^1, \dots, v_{r-2}^1,$$

$$v^2, v_0^2, v_1^2, \dots, v_{r-2}^2, v^3, v_0^3, v_1^3, \dots, v_{r-2}^3,$$

$$v^4, v_0^4, v_1^4, \dots, v_{r-2}^4, v^5, v_0^5, v_1^5, \dots, v_{r-2}^5,$$

$$v^6, v_0^6, v_1^6, \dots, v_{r-2}^6, v^7, v_0^7, v_1^7, \dots, v_{r-2}^7\}$$

$$\text{dan himpunan busur } E(M(C_4) \odot \overline{K_r}) =$$

$$\{cc_1, cc_3, c_4, cc_7, cv, cv_0, cv_1, \dots, v_{r-2},$$

$$c_1c_2, c_1c_4, c_1c_5, c_1v^2, c_1v_0^2, c_1v_1^2, \dots,$$

$$c_1v_{r-2}^2, c_2c_3, c_2c_5, c_2c_6, c_2v^4, c_2v_0^4, c_2v_1^4, \dots,$$

$$c_2v_{r-2}^4, c_3v^6, c_3v_0^6, c_3v_1^6, \dots, c_3v_{r-2}^6, c_4v^1,$$

$$c_4v_0^1, c_4v_1^1, \dots, c_4v_{r-2}^1, c_5v^3, c_5v_0^3,$$

$$c_5v_1^3, \dots, c_5v_{r-2}^3, c_6v^5, c_6v_0^5, c_6v_1^5, \dots,$$

$$c_6v_{r-2}^5, c_7v^7, c_7v_0^7, c_7v_1^7, \dots, c_7v_{r-2}^7\}.$$

Banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $8r + 8$ dan $8r + 12$ dinotasikan dengan $|V| = 8r + 8$ dan $|E| = 8r + 12$.

Didefinisikan pelabelan f pada simpul $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ sebagai berikut:

$$f(c) = 0. \quad (1)$$

$$f(c_1) = 8r + 11 \quad (2)$$

$$f(c_2) = 10. \quad (3)$$

$$f(c_3) = 8r + 12. \quad (4)$$

$$f(c_4) = 8r + 6. \quad (5)$$

$$f(c_5) = 7. \quad (6)$$

$$f(c_6) = 8r + 8. \quad (7)$$

$$f(c_7) = 8r + 10. \quad (8)$$

$$f(v) = 8r + 9. \quad (9)$$

$$f(v_0) = f(v) - 17 \\ = 8r + 9 - 17 = 8r - 8. \quad (10)$$

$$f(v_i) = f(v_0) - 8i = 8r - 8 - 8i, \\ \text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \quad (11)$$

$$f(v^1) = 1. \quad (12)$$

$$f(v_i^1) = 1 + 8i, \\ \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, r - 1. \quad (13)$$

$$f(v^2) = 4. \quad (14)$$

$$f(v_0^2) = 12. \quad (15)$$

$$f(v_i^2) = 12 + 3i, \\ \text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \quad (16)$$

$$f(v^3) = 8r + 7 \quad (17)$$

$$f(v_0^3) = 8r + 1. \quad (18)$$

$$f(v_1^3) = 8r - 2. \quad (19)$$

$$f(v_i^3) = f(v_0^3) - 8i = 8r - 2 - 8i, \\ \text{untuk } i = 2, \dots, r - 3. \quad (20)$$

$$f(v^4) = 11. \quad (21)$$

$$f(v_i^4) = 11 + 8i, \\ \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, r - 1. \quad (22)$$

$$f(v^5) = 5. \quad (23)$$

$$f(v_i^5) = 5 + 8i, \\ \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, r - 1. \quad (24)$$

$$f(v^6) = 8r + 5. \quad (25)$$

$$f(v_0^6) = 8r. \quad (26)$$

$$f(v_1^6) = 8r + 2. \quad (27)$$

$$f(v_i^6) = f(v_0^6) + 8i = 8r + 2 + 8i, \\ \text{untuk } i = 2, \dots, r - 3. \quad (28)$$

$$f(v^7) = 2 \quad (29)$$

$$f(v_0^7) = 20 \quad (30)$$

$$f(v_i^7) = 20 + 8i, \\ \text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \quad (31)$$

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (1 – 31), terlihat bahwa setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$, yang mengakibatkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (1 – 31) merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur f' yang diinduksi dari pelabelan simpul f dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$. Pelabelan busur $M(C_4) \odot \overline{K_r}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(cc_1) &= |f(c) - f(c_1)| \\ &= |(0) - (8r + 11)| = 8r + 11. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_3) &= |f(c) - f(c_3)| \\ &= |(0) - (8r + 12)| = 8r + 12. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_4) &= |f(c) - f(c_4)| \\ &= |(0) - (8r + 6)| = 8r + 6. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_7) &= |f(c) - f(c_7)| \\ &= |(0) - (8r + 10)| = 8r + 10. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} f'(cv) &= |f(c) - f(v)| \\ &= |(0) - (8r + 9)| = 8r + 9. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} f'(cv_0) &= |f(c) - f(v_0)| \\ &= |(0) - (8r - 8)| = 8r - 8. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} f'(cv_i) &= |f(c) - f(v_i)| \\ &= |(0) - (8r - 8 - 8i)| = 8r - 8 - 8i, \\ &\text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_2) &= |f(c_1) - f(c_2)| \\ &= |(8r + 11) - (10)| = 8r + 1. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_4) &= |f(c_1) - f(c_4)| \\ &= |(8r + 11) - (8r + 6)| = 5. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_5) &= |f(c_1) - f(c_5)| \\ &= |(8r + 11) - (7)| = 8r + 4. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2c_3) &= |f(c_2) - f(c_3)| \\ &= |(10) - (8r + 12)| = 8r + 2. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2c_5) &= |f(c_2) - f(c_5)| \\ &= |(10) - (7)| = 3. \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2c_6) &= |f(c_2) - f(c_6)| \\ &= |(10) - (8r + 8)| = 8r - 2. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v^2) &= |f(c_1) - f(v^2)| \\ &= |(8r + 11) - (4)| = 8r + 7. \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v_0^2) &= |f(c_1) - f(v_0^2)| \\ &= |(8r + 11) - (12)| = 8r - 1. \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v_i^2) &= |f(c_1) - f(v_i^2)| \\ &= |(8r + 11) - (f(v_0^2) + 3i)| \\ &= 8r - 1 - 3i, \\ &\text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v^4) &= |f(c_2) - f(v^4)| \\ &= |(10) - (11)| = 1. \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v_i^4) &= |f(c_2) - f(v_i^4)| \\ &= |(10) - (11 + 8i)| = 8i + 1, \\ &\text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v^6) &= |f(c_3) - f(v^6)| \\ &= |(8r + 12) - (8r + 5)| = 7. \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v_0^6) &= |f(c_3) - f(v_0^6)| \\ &= |(8r + 12) - (8r)| = 12. \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v_1^6) &= |f(c_3) - f(v_1^6)| \\ &= |(8r + 12) - (8r + 2)| = 10. \end{aligned} \quad (52)$$

$$= 8r - 10 - 8i, \text{ untuk } i = 2, \dots, r - 3. \quad (53)$$

$$\begin{aligned} f'(c_4v^1) &= |f(c_4) - f(v^1)| \\ &= |(8r + 6) - (1)| = 8r + 5. \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} f'(c_4v_i^1) &= |f(c_4) - f(v_i^1)| = |(8r + 6) - \\ &(1 + 8i)| = 8r - 3 - 8i, \\ &\text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, r - 1. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v^3) &= |f(c_5) - f(v^3)| \\ &= |(7) - (8r + 1)| = 8r + 6. \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v_0^3) &= |f(c_5) - f(v_0^3)| = |(7) - \\ &(8r + 7)| = 8r. \end{aligned} \quad (57)$$

$$= |(7) - (8r - 2)| = 8r - 9. \quad (58)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v_i^3) &= |f(c_5) - f(v_i^3)| \\ &= |(7) - (8r - 10i)| = 8r - 7 - 10i, \\ &\text{untuk } i = 2, \dots, r - 3. \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} f'(c_6v^5) &= |f(c_6) - f(v^5)| \\ &= |(8r + 8) - (5)| = 8r + 3. \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} f'(c_6v_i^5) &= |f(c_6) - f(v_i^5)| \\ &= |(8r + 8) - (5 + 8i)| = 8r + 3 - 8i, \\ &\text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v^7) &= |f(c_7) - f(v^7)| \\ &= |(8r + 10) - (2)| = 8r + 8. \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v_0^7) &= |f(c_7) - f(v_0^7)| \\ &= |(8r + 10) - (20)| = 8r - 10. \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v_i^7) &= |f(c_7) - f(v_i^7)| \\ &= |(8r + 10) - (20 + 8i)| = 8r - 10 - 8i, \\ &\text{untuk } i = 1, 2, \dots, r - 2. \end{aligned} \quad (64)$$

Berdasarkan pelabelan f' yang didefinisikan pada persamaan (32 – 64) terlihat bahwa setiap busurnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Sehingga, terlihat bahwa pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$. Terbukti bahwa f membentuk pelabelan graceful untuk graf hasil korona bunga mawar $M(C_4) \odot \overline{K_r}$.

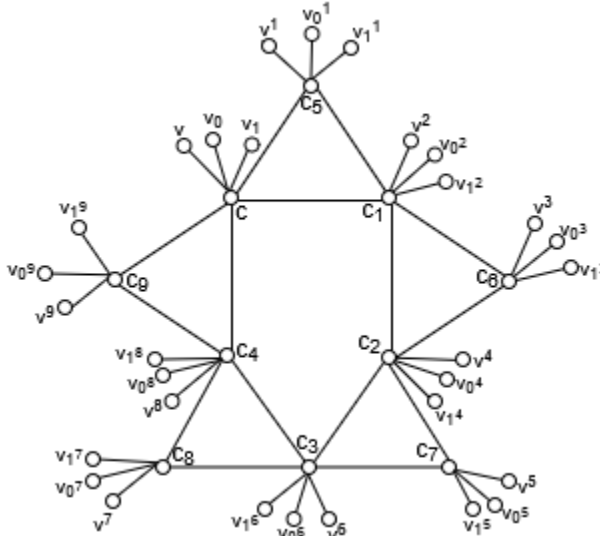
Teorema 2

Graf hasil korona bunga mawar $M(C_5) \odot \overline{K_r}$ memiliki pelabelan graceful untuk $r = 1, 2, 3$.

Bukti:

Misalkan notasi simpul graf hasil korona bunga mawar $M(C_5) \odot \overline{K_r}$ diberikan pada Gambar 5.

$$(52)f'(c_3v_i^4) =$$



Gambar 5. Penamaan Simpul
Graf $M(C_5) \odot \overline{K_r}$

Pada Gambar 5 di atas terlihat bahwa himpunan simpul $V(A_{(5,1)} \odot \overline{K_r}) = \{c, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, v^1, v_0^1, v_1^1, v^2, v_0^2, v_1^2, v^3, v_0^3, v_1^3, v^4, v_0^4, v_1^4, v^5, v_0^5, v_1^5, v^6, v_0^6, v_1^6, v^7, v_0^7, v_1^7, v^8, v_0^8, v_1^8, v^9, v_0^9, v_1^9\}$ dan himpunan busur $E(A_{(5,1)} \odot \overline{K_r}) = \{cc_1, cc_4, cc_5, cc_9, cv, cv_0, cv_1, c_1c_2, c_1c_5, c_1c_6, c_1v^2, c_1v_0^2, c_1v_1^2, c_2c_3, c_2c_6, c_2c_7, c_2v^4, c_2v_0^4, c_2v_1^4, c_3v^6, c_3v_0^6, c_3v_1^6, c_4v^8, c_4v_0^8, c_4v_1^8, c_5v^1, c_5v_0^1, c_5v_1^1, c_6v^3, c_6v_0^3, c_6v_1^3, c_7v^5, c_7v_0^5, c_7v_1^5, c_8v^7, c_8v_0^7, c_8v_1^7, c_9v^9, c_9v_0^9, c_9v_1^9\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $10r + 10$ dan $10r + 15$ dinotasikan dengan $|V| = 10r + 10$ dan $|E| = 10r + 15$.

Didefinisikan pelabelan f pada simpul $A_{(5,1)} \odot \overline{K_r}$ sebagai berikut:

$$f(c) = 0. \quad (65)$$

$$f(c_1) = 10r + 14, \quad (66)$$

$$f(c_2) = 1. \quad (67)$$

$$f(c_3) = 10r. \quad (68)$$

$$f(c_4) = 10r + 5. \quad (69)$$

$$f(c_5) = 4. \quad (70)$$

$$f(c_6) = 3. \quad (71)$$

$$f(c_7) = 10r + 13. \quad (72)$$

$$f(c_8) = 10r + 9. \quad (73)$$

$$f(c_9) = 10r + 7. \quad (74)$$

$$f(v) = 14. \quad (75)$$

$$f(v_0) = 16. \quad (75)$$

$$f(v_1) = 26 \quad (76)$$

$$f(v^1) = 22. \quad (77)$$

$$f(v_0^1) = 19. \quad (78)$$

$$f(v_1^1) = 29. \quad (79)$$

$$f(v^2) = 10r + 5. \quad (80)$$

$$f(v_0^2) = 10. \quad (81)$$

$$f(v_1^2) = 35. \quad (82)$$

$$f(v^3) = 10r + 6. \quad (83)$$

$$f(v_0^3) = 10r + 11. \quad (84)$$

$$f(v_1^3) = 10r + 1. \quad (85)$$

$$f(v^4) = 13. \quad (86)$$

$$f(v_0^4) = 23. \quad (87)$$

$$f(v_1^4) = 18. \quad (88)$$

$$f(v^5) = 7. \quad (89)$$

$$f(v_0^5) = 20. \quad (90)$$

$$f(v_1^5) = 30. \quad (91)$$

$$f(v^6) = 5. \quad (92)$$

$$f(v_0^6) = 11. \quad (93)$$

$$f(v_1^6) = 8. \quad (94)$$

$$f(v^7) = 9. \quad (95)$$

$$f(v_0^7) = 12. \quad (96)$$

$$f(v_1^7) = 15. \quad (97)$$

$$f(v^8) = 10r + 8. \quad (98)$$

$$f(v_0^8) = 10r + 4. \quad (99)$$

$$f(v_1^8) = 10r - 6. \quad (100)$$

$$f(v^9) = 6. \quad (101)$$

$$f(v_0^9) = 17. \quad (102)$$

$$f(v_1^9) = 27 \quad (103)$$

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (65 – 103) terlihat bahwa setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$, yang mengakibatkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (65 – 103) merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yaitu dengan cara yang sama pada Teorema 1 dapat dibuktikan.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur f' yang diinduksi dari pelabelan simpul f dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$. Pelabelan busur $A_{(5,1)} \odot \overline{K_r}$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(cc_1) &= |f(c) - f(c_1)| \\ &= |(0) - (10r + 14)| \\ &= 10r + 14, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_4) &= |f(c) - f(c_4)| \\ &= |(0) - (10r + 5)| \\ &= 10r + 5, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_5) &= |f(c) - f(c_5)| \\ &= |(0) - (4)| \\ &= 4, \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} f'(cc_9) &= |f(c) - f(c_9)| \\ &= |(0) - (10r + 7)| \\ &= 10r + 7, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} f'(cv) &= |f(c) - f(v)| \\ &= |(0) - (14)| \\ &= 14, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} f'(cv_0) &= |f(c) - f(v_0)| \\ &= |(0) - (16)| \\ &= 16, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} f'(cv_1) &= |f(c) - f(v_1)| \\ &= |(0) - (26)| \\ &= 26, \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_3) &= |f(c_1) - f(c_3)| \\ &= |(10r + 14) - (10r)| \\ &= 14, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_5) &= |f(c_1) - f(c_5)| \\ &= |(10r + 14) - (4)| \\ &= 10r + 10, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1c_6) &= |f(c_1) - f(c_6)| \\ &= |(10r + 14) - (3)| \\ &= 10r + 11, \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v^2) &= |f(c_1) - f(v^2)| \\ &= |(10r + 14) - (10)| \\ &= 10r + 4, \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v_0^2) &= |f(c_1) - f(v_0^2)| \\ &= |(10r + 14) - (25)| \\ &= 10r - 9, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v_1^2) &= |f(c_1) - f(v_1^2)| \\ &= |(10r + 14) - (35)| \\ &= 10r - 21, \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v^4) &= |f(c_2) - f(v^4)| \\ &= |(1) - (13)| \\ &= 12, \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v_0^4) &= |f(c_2) - f(v_0^4)| \\ &= |(1) - (23)| \\ &= 22, \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v_1^4) &= |f(c_2) - f(v_1^4)| \\ &= |(1) - (18)| \\ &= 17, \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v^6) &= |f(c_3) - f(v^6)| \\ &= |(10r) - (5)| \\ &= 10r - 5, \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v_0^6) &= |f(c_3) - f(v_0^6)| \\ &= |(10r) - (11)| \\ &= 10r - 11, \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} f'(c_3v_1^6) &= |f(c_3) - f(v_1^6)| \\ &= |(10r) - (8)| \\ &= 10r - 8, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} f'(c_4v^8) &= |f(c_4) - f(v^8)| \\ &= |(10r + 5) - (10r + 8)| \\ &= 3, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} f'(c_4v_0^8) &= |f(c_4) - f(v_0^8)| \\ &= |(10r + 5) - (10r + 4)| \\ &= 1, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} f'(c_4v_1^8) &= |f(c_4) - f(v_1^8)| \\ &= |(10r + 5) - (10r - 6)| \\ &= 11, \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v^1) &= |f(c_5) - f(v^1)| \\ &= |(4) - (22)| \\ &= 18, \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v_0^1) &= |f(c_5) - f(v_0^1)| \\ &= |(4) - (19)| \\ &= 15, \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} f'(c_5v_1^1) &= |f(c_5) - f(v_1^1)| \\ &= |(4) - (29)| \\ &= 25, \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} f'(c_6v^3) &= |f(c_6) - f(v^3)| \\ &= |(3) - (10r + 6)| \\ &= 10r + 3, \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} f'(c_6v_0^3) &= |f(c_6) - f(v_0^3)| \\ &= |(3) - (10r + 1)| \\ &= 10r - 2, \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} f'(c_6v_1^3) &= |f(c_6) - f(v_1^3)| \\ &= |(3) - (10r + 11)| \\ &= 10r + 8, \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v^5) &= |f(c_7) - f(v^5)| \\ &= |(10r + 13) - (7)| \\ &= 10r + 6, \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v_0^5) &= |f(c_7) - f(v_0^5)| \\ &= |(10r + 13) - (20)| \\ &= 10r - 7, \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} f'(c_7v_1^5) &= |f(c_7) - f(v_1^5)| \\ &= |(10r + 13) - (30)| \\ &= 10r - 17, \end{aligned} \quad (134)$$

$$f'(c_8v^7) = |f(c_8) - f(v^7)|$$

$$= |(10r + 9) - (9)|$$

$$= 10r,$$

$$f'(c_8v_0^7) = |f(c_8) - f(v_0^7)|$$

$$= |(10r + 9) - (12)|$$

$$= 10r - 3,$$

$$f'(c_8v_1^7) = |f(c_8) - f(v_1^7)|$$

$$= |(10r + 9) - (15)|$$

$$= 10r - 6,$$

$$f'(c_9v^9) = |f(c_9) - f(v^9)|$$

$$= |(10r + 7) - (6)|$$

$$= 10r + 1,$$

$$f'(c_9v_0^9) = |f(c_9) - f(v_0^9)|$$

$$= |(10r + 7) - (17)|$$

$$= 10r - 10,$$

$$f'(c_9v_1^9) = |f(c_9) - f(v_1^9)|$$

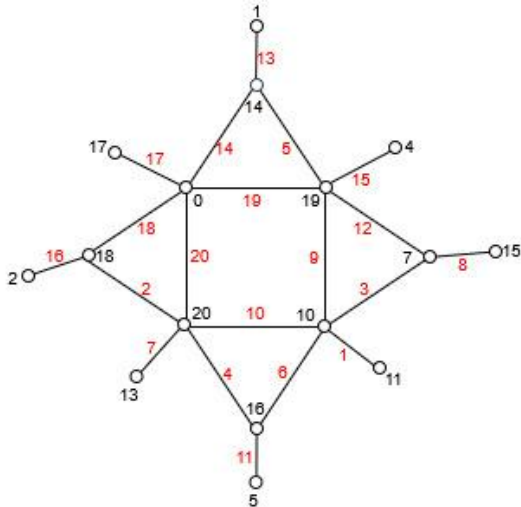
$$= |(10r + 7) - (27)|$$

$$= 10r - 20,$$

Berdasarkan pelabelan f' yang didefinisikan pada persamaan (104 – 140) terlihat bahwa setiap busurnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ yaitu dengan cara yang sama pada Teorema 1 dapat dibuktikan.

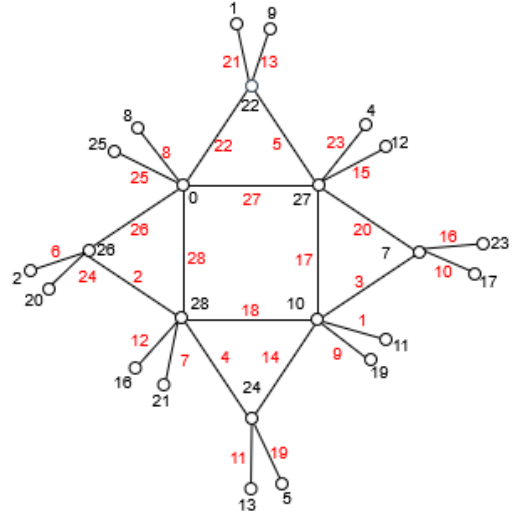
Sehingga, terlihat bahwa pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$. Terbukti bahwa f membentuk pelabelan *graceful* untuk graf hasil korona bunga aster $A_{(5,1)} \odot \overline{K_r}$.

Pelabelan Graceful $M(C_4) \odot \overline{K_1}$

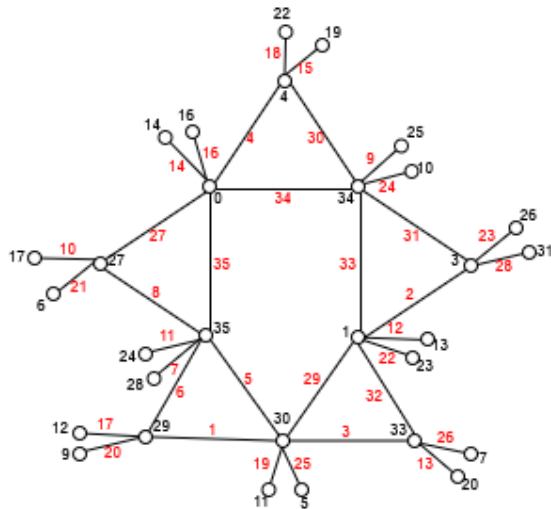


Gambar 6. Pelabelan Graceful $M(C_4) \odot \overline{K_1}$

Pelabelan Graceful $M(C_4) \odot \overline{K_2}$

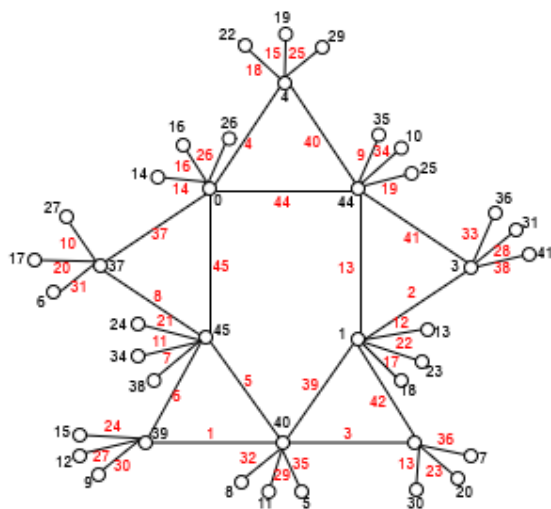


Pelabelan Graceful $M(C_5) \odot \overline{K_2}$



Gambar 10. Pelabelan Graceful $M(C_5) \odot \overline{K_2}$

Pelabelan Graceful $M(C_5) \odot \overline{K_3}$



Gambar 11. Pelabelan Graceful $M(C_5) \odot \overline{K_3}$

graceful graf hasil korona bunga mawar $M(C_n) \odot \overline{K_r}$ untuk $n \geq 5$.

E. Daftar Pustaka

- Chartrand, G., Lesniak, L., & Ping, Z. (2011). *Graph & Digraph* (5th ed). Boca Raton: CRC Press.
- Gallian, J.A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, #DS6
- Hartsfield, N & Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory*. New York: Dover.
- Sugeng, K. A., John, P., Lawrence, M. L., Anwar, L. F., Baca, M., & Semanicova-Fenovicova, A. (2023). Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 11(1): 27-38.
- Yero, I.G., Kuziak, D., & Velazquez, J.A.R. (2011). On The Metric Dimension of Corona Product Graphs, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2793-2798.

D. Kesimpulan dan Saran

1. Kesimpulan:

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa pada graf hasil korona bunga mawar $M(C_n) \odot \overline{K_r}$ untuk $n = 4$, $r \geq 1$ dan untuk $n = 4, r = 1, 2, 3$ mempunyai pelabelan *graceful*.

2. Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan yaitu dengan menentukan pelabelan