

## Model Aljabar Max-Plus pada Sistem Distribusi Produk *Bakery* dengan Representasi Petri Net

Siti Nurlaila Mustapa<sup>1</sup>, Nurwan<sup>2</sup>, La Ode Nashar<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Gorontalo-Indonesia 96128

<sup>3</sup>Program Studi Statistika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Gorontalo-Indonesia 96128

Email: [sitinurlailamustapa9@gmail.com](mailto:sitinurlailamustapa9@gmail.com), [nurwan@ung.ac.id](mailto:nurwan@ung.ac.id), [laode.nashar@ung.ac.id](mailto:laode.nashar@ung.ac.id)

### ABSTRAK

Efisiensi distribusi merupakan aspek penting dalam sistem distribusi produk *bakery* karena keterlambatan pengiriman berdampak pada kesegaran produk, biaya operasional, dan keandalan layanan kepada pelanggan. Penelitian ini bertujuan membangun model matematis untuk menganalisis waktu distribusi produk UD. Win Win Bakery dengan mengintegrasikan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Petri Net digunakan untuk merepresentasikan proses distribusi yang berurutan dan berbasis kejadian, meliputi persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan distribusi, pembongkaran barang, serta perjalanan kembali ke pabrik. Struktur Petri Net kemudian ditransformasikan menjadi model dan matriks Aljabar Max-Plus untuk menghitung total waktu distribusi setiap tim. Data diperoleh melalui observasi dan wawancara terkait jadwal distribusi, rute, jumlah kendaraan, waktu muat, waktu bongkar, dan durasi perjalanan. Hasil menunjukkan variasi waktu distribusi antar sembilan tim. Durasi terpanjang ditemukan pada rute Toboli-Parigi, Ampibabo, dan Kotamobagu, yang mengindikasikan ketidakseimbangan beban kerja dan potensi *bottleneck*. Kontribusi utama penelitian ini adalah penerapan Aljabar Max-Plus didukung Petri Net sebagai kerangka terstruktur untuk mengidentifikasi inefisiensi waktu distribusi skala regional. Implikasi penelitian menunjukkan bahwa Aljabar Max-Plus dapat digunakan secara efektif dalam sistem distribusi berbasis kejadian diskrit serta mendukung evaluasi rute, penyeimbangan beban kerja, dan pengambilan keputusan operasional logistik produk mudah rusak.

**Kata kunci:** Aljabar Max-Plus, Petri Net, Pemodelan Waktu Distribusi, Distribusi Produk Bakery, Analisis *Bottleneck*

### ABSTRACT

*Distribution efficiency is a critical aspect of bakery product distribution systems, as delivery delays affect product freshness, operational costs, and service reliability to customers. This study aims to develop a mathematical model to analyze product distribution time at UD. Win Win Bakery by integrating Petri Nets and Max-Plus Algebra. Petri Nets are used to represent the sequential, event-based distribution process, including vehicle preparation, goods loading, distribution travel, goods unloading, and the return trip to the factory. The Petri Net structure is then transformed into a Max-Plus Algebra model and matrix to calculate the total distribution time for each team. Data were collected through observations and interviews regarding distribution schedules, routes, number of vehicles, loading time, unloading time, and travel duration. The results show significant variations in distribution times among the nine delivery teams. The longest durations were found on the Toboli-Parigi, Ampibabo, and Kotamobagu routes, indicating workload imbalance and potential bottlenecks in the distribution system. The main contribution of this study lies in the application of Max-Plus Algebra supported by Petri Nets as a structured framework to identify time inefficiencies in regional-scale distribution. The implications of this study suggest that Max-Plus Algebra can be effectively used in discrete event-based distribution systems and supports route evaluation, workload balancing, and operational decision-making in perishable product logistics.*

**Keywords:** Max-Plus Algebra, Petri Nets, Distribution Time Modeling, Bakery Product Distribution, Bottleneck Analysis.

#### A. Pendahuluan

Pemodelan matematika memiliki peran penting dalam menganalisis sistem operasional yang kompleks, terutama sistem yang melibatkan keterurutan aktivitas, keterbatasan sumber daya, ketergantungan waktu, dan sinkronisasi antarproses. Dalam banyak sistem produksi dan distribusi, kinerja tidak hanya ditentukan oleh ketersediaan sumber daya, tetapi juga oleh waktu

terjadinya setiap aktivitas, urutan proses, serta hubungan antarbagian dalam sistem. Sistem semacam ini umumnya dapat dipandang sebagai *discrete event system*, yaitu sistem yang perubahannya terjadi pada saat kejadian tertentu, bukan secara kontinu. Pada sistem distribusi produk yang bersifat mudah rusak atau sensitif terhadap waktu, seperti produk *bakery*, diperlukan model yang mampu merepresentasikan aliran

proses, menghitung durasi operasional, dan mengidentifikasi keterlambatan yang berpotensi menurunkan efisiensi distribusi dan kualitas layanan.

Menurut Simanjuntak et al. (2024), Distribusi merupakan rangkaian proses dan aktivitas yang bertujuan untuk memastikan produk beserta hak kepemilikannya berpindah secara efektif dari produsen kepada konsumen. Distribusi adalah salah satu kegiatan yang memiliki peran penting pada suatu pemasaran, dimana pada kegiatan ini bertujuan untuk menyampaikan informasi, memengaruhi, dan meningkatkan pasar sasaran mengenai perusahaan serta produknya agar konsumen bersedia menerima, membeli, dan tetap menggunakan produk yang ditawarkan (Putri & Sukardi, 2023). Selain itu, Nabilasalva and Nurdiani (2024) juga berpendapat bahwa aktivitas distribusi dapat berdampak positif terhadap peningkatan penjualan sebab suatu produk lebih mudah dijangkau oleh konsumen, walaupun aktivitas ini membutuhkan biaya operasional yang besar. Sebuah produk yang memiliki kualitas baik, harga yang bersaing, serta promosi yang efektif, tetap berpotensi gagal dalam pemasaran jika pelanggan kesulitan untuk menemukannya.

Penerapan aktivitas distribusi tersebut dapat ditemukan pada perusahaan UD. Win Win Bakery yang berlokasi di Kabupaten Boalemo. Usaha ini dan melayani beberapa pengiriman ke berbagai toko pelanggan di wilayah berbeda-beda. Usaha ini awalnya hanya memproduksi kue seperti cake dan donat. namun, seiring meningkatnya permintaan pasar akhirnya perusahaan memperluas produksinya ke berbagai jenis roti. Meningkatnya permintaan menyebabkan aktivitas distribusi menjadi semakin padat.

Padatnya aktivitas distribusi ini berisiko memicu keterlambatan pengiriman yang dapat menurunkan kualitas produk. Kondisi ini menjadi semakin sulit dianalisis karena belum tersedianya analisis waktu yang terukur pada UD. Win Win Bakery. Hal tersebut dapat menyulitkan perusahaan dalam mengidentifikasi hambatan operasional secara tepat, yang pada akhirnya berdampak pada efisiensi distribusi. Oleh karena itu, diperlukan suatu model matematis yang mampu menganalisis total waktu yang dibutuhkan untuk mendistribusikan barang dalam bentuk yang terukur.

Aljabar Max-Plus merupakan bagian dari struktur aljabar, yaitu cabang ilmu yang mempelajari himpunan beserta satu atau lebih

operasi bimer yang diterapkan pada sistem aljabar (Clarisa et al., 2021). Aljabar Max-Plus adalah salah satu pendekatan dalam matematika terapan yang banyak digunakan untuk memodelkan sistem yang bergantung pada urutan kejadian dan waktu penyelesaian aktivitas. Selain itu, Aljabar Max-Plus menyediakan model matematis yang sesuai untuk menganalisis dan mengatur keterbatasan sumber daya serta mengoptimalkan hubungan antar proses secara waktu nyata (Khairina, A'yun, & Sandariria, 2025). Secara umum, Aljabar Max-Plus didefinisikan pada himpunan  $\mathcal{R}_{max} = \mathcal{R} \cup \{-\infty\}$ , dengan dua operasi utama, yaitu operasi maksimum dan operasi penjumlahan. Jika  $a, b \in \mathcal{R}_{max}$ , maka operasi dasar dalam Aljabar Max-Plus dinyatakan sebagai (Sakta, Yanita, & Helmi, 2022):

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad (1)$$

$$a \otimes b = a + b \quad (2)$$

Dalam struktur ini, elemen netral terhadap operasi  $\oplus$  adalah  $\varepsilon = -\infty$ , sedangkan elemen identitas terhadap  $\otimes$  adalah  $e = 0$  (Subiono, 2015). Perbedaan mendasar antara Aljabar Max-Plus dan aljabar konvensional terletak pada cara operasi aritmatika didefinisikan. Operasi penjumlahan dalam aljabar konvensional digantikan oleh operasi maksimum, sedangkan operasi perkalian digantikan oleh operasi penjumlahan. Karakteristik ini menyebabkan relasi waktu yang semula bersifat nonlinier dalam aljabar konvensional dapat direpresentasikan secara linier dalam bentuk Max-Plus. Perbedaan utama antara keduanya juga terletak pada  $\mathcal{R}_{max}$  yang semua elemennya kecuali elemen nol tidak mempunyai invers penjumlahan (Doberhol, Suroto, & Guswanto, 2024).

Dalam konteks sistem kejadian diskrit, Aljabar Max-Plus memiliki relevansi yang kuat karena banyak sistem operasional berjalan berdasarkan prinsip keterurutan dan sinkronisasi aktivitas. Suatu aktivitas umumnya baru dapat dimulai setelah satu atau beberapa aktivitas sebelumnya selesai. Oleh karena itu dinyatakan melalui operasi maksimum, sedangkan, waktu mulai suatu kejadian ditentukan oleh waktu selesai paling akhir dari kejadian-kejadian pendahulunya. Kondisi seperti ini secara alami dapat durasi proses direpresentasikan melalui operasi penjumlahan. Dengan demikian, Aljabar Max-Plus sesuai digunakan untuk menganalisis sistem produksi, sistem antrean, penjadwalan, jaringan transportasi, rantai pasok, dan distribusi barang yang memiliki struktur kejadian berurutan dan bergantung pada waktu.

Pada sistem distribusi, kompleksitas pemodelan meningkat ketika beberapa tim pengiriman, rute distribusi, proses pemuatan, proses pembongkaran, serta perjalanan kembali ke lokasi awal harus dikoordinasikan dalam waktu kerja yang terbatas. Pendekatan deskriptif konvensional dapat memberikan informasi mengenai total durasi perjalanan, tetapi sering kali belum cukup untuk merepresentasikan hubungan antaraktivitas secara terstruktur dan matematis. Keterbatasan ini menjadi semakin penting pada distribusi produk *bakery* karena keterlambatan pengiriman dapat berdampak pada kesegaran produk, kepuasan pelanggan, efisiensi biaya operasional, dan perputaran modal. Kondisi tersebut juga terlihat pada sistem distribusi UD. Win Win Bakery, yang melibatkan sembilan tim distribusi dengan wilayah layanan dan durasi operasional yang berbeda-beda.

Selain Aljabar Max-Plus, Petri Net juga banyak digunakan untuk merepresentasikan sistem yang bersifat kejadian. Menurut Subiono (2015), Petri Net merupakan graf berarah yang terdiri atas dua jenis simpul, yaitu *place* dan *transition*, yang dihubungkan oleh *arc*. *Place* menunjukkan keadaan atau kondisi dalam sistem, sedangkan *transition* menunjukkan kejadian atau aktivitas yang menyebabkan perubahan keadaan. Token pada *place* digunakan untuk menunjukkan terpenuhi atau tidaknya suatu kondisi (Kismanti & Indriyani, 2021). Dengan demikian, Petri Net dapat menggambarkan alur proses, hubungan sebab-akibat antaraktivitas, sinkronisasi, konflik, serta distribusi proses dalam suatu sistem (Rauf, Nurwan, Yahya, & Nuha, 2021). Selain itu, simulasi model Petri Net yang terbentuk dapat dilakukan dengan bantuan model matematika berupa Aljabar Max-Plus (Khotimah, A'yun, & Wasono, 2024). Oleh karena itu, Pada penelitian ini, Petri Net digunakan sebagai representasi awal untuk menggambarkan alur distribusi barang, sedangkan Aljabar Max-Plus digunakan untuk menganalisis dinamika waktu dari model tersebut.

Beberapa penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa Aljabar Max-Plus dan Petri Net efektif digunakan dalam pemodelan sistem yang memiliki karakteristik kejadian diskrit. Rauf et al. (2021) menerapkan Petri Net dan Aljabar Max-Plus dalam penjadwalan proyek pembangunan perumahan untuk menggambarkan keterurutan aktivitas dan ketergantungan waktu antarpekerjaan. Mustofani et al. (2022)

menggunakan pendekatan yang sama dalam perencanaan dan pengadaan obat di instalasi farmasi rumah sakit, sedangkan Sholehurrohman et al. (2024) menerapkan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi penjualan kopi Lampung untuk menghitung waktu tunggu secara periodik. Penelitian lain oleh Bhardwaj and Agrawal (2020) menunjukkan bahwa Petri Net dapat membantu menyederhanakan analisis rantai pasok produk mudah rusak yang memiliki banyak variabel dan ketergantungan proses.

Meskipun penelitian-penelitian tersebut memperlihatkan efektivitas Aljabar Max-Plus dan Petri Net, masih terdapat beberapa celah penelitian yang perlu diperhatikan. Pertama, penerapan Aljabar Max-Plus lebih banyak diarahkan pada sistem produksi, sistem antrean, pengadaan, atau penjadwalan proyek, sedangkan penerapannya pada distribusi produk *bakery* skala regional masih belum banyak dikaji. Kedua, sebagian penelitian sebelumnya lebih menekankan pembentukan model, tetapi belum secara eksplisit menghubungkan keluaran model dengan identifikasi ketidakseimbangan beban kerja dan *bottleneck* berbasis rute dalam sistem distribusi empiris. Ketiga, integrasi representasi Petri Net dan matriks Aljabar Max-Plus untuk membandingkan beberapa tim distribusi dalam satu sistem operasional masih memerlukan pengembangan lebih lanjut.

Secara matematis, model Aljabar Max-Plus pada sistem kejadian diskrit sering direpresentasikan dalam bentuk matriks. Jika  $x(k)$  menyatakan vektor waktu kejadian pada periode ke- $k$ , maka dinamika sistem dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \quad (3)$$

Dengan  $A$  sebagai matriks Max-Plus yang memuat durasi atau bobot waktu antaraktivitas. Entri matriks  $a_{ij}$  menunjukkan waktu atau bobot ketergantungan dari kejadian  $j$  menuju kejadian  $i$ . Dalam bentuk komponen, relasi tersebut dapat dituliskan sebagai

$$x_i(k+1) = \max_j (a_{ij} + x_j(k)) \quad (4)$$

Bentuk ini menunjukkan bahwa waktu suatu kejadian ditentukan oleh nilai maksimum dari seluruh waktu kejadian pendahulu yang telah ditambahkan dengan durasi aktivitas terkait. Dengan demikian, matriks Max-Plus memberikan dasar matematis untuk menghitung waktu penyelesaian, membandingkan durasi antarjalur, serta mengidentifikasi aktivitas atau rute yang berpotensi menjadi penghambat.

Dalam kajian Aljabar Max-Plus yang lebih lanjut, beberapa konsep seperti *precedence graph*, *critical circuit*, *cycle mean*, *eigenvalue*, dan *eigenvector* sering digunakan untuk menganalisis perilaku periodik dan kestabilan sistem. *Precedence graph* merepresentasikan hubungan ketergantungan antar variabel dalam bentuk graf berbobot, sedangkan *critical circuit* menunjukkan lintasan atau siklus kritis yang menentukan kinerja sistem. Nilai eigen Max-Plus umumnya berkaitan dengan rata-rata siklus maksimum atau *maximum cycle mean*, yang dapat digunakan untuk menentukan waktu siklus sistem pada kondisi periodik. Namun, dalam penelitian ini, analisis difokuskan pada pembentukan model Petri Net, representasi matriks, dan perhitungan durasi distribusi setiap tim.

Untuk menjawab celah tersebut, penelitian ini menawarkan pendekatan pemodelan terintegrasi dengan menggunakan representasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi UD. Win Win Bakery. Petri Net digunakan untuk menggambarkan alur kejadian dalam proses distribusi, mulai dari persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan menuju wilayah tujuan, pembongkaran barang, hingga perjalanan kembali ke pabrik. Model Petri Net tersebut kemudian ditransformasikan ke dalam formulasi dan matriks Aljabar Max-Plus untuk menghitung total waktu distribusi setiap tim. Melalui pendekatan ini, proses distribusi tidak hanya dianalisis secara deskriptif, tetapi juga direpresentasikan sebagai sistem kejadian diskrit yang memiliki struktur matematis.

Kebaruan penelitian ini terletak pada penerapan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi produk *bakery* skala regional dengan menggunakan Petri Net sebagai representasi struktur proses. Berbeda dari penelitian sebelumnya yang lebih banyak berfokus pada sistem produksi, pengadaan, proyek, atau antrean, penelitian ini mengkaji kasus empiris distribusi produk *bakery* yang melibatkan sembilan tim pengiriman dengan rute dan durasi operasional yang berbeda. Model yang dibangun memungkinkan identifikasi rute dengan durasi terpanjang, perbandingan waktu distribusi antar tim, serta penentuan titik-titik yang berpotensi menjadi bottleneck dalam sistem distribusi.

Tujuan penelitian ini adalah membangun model Aljabar Max-Plus untuk menganalisis waktu distribusi produk *bakery* dengan menggunakan representasi Petri Net. Secara khusus, penelitian ini bertujuan merepresentasikan proses distribusi UD.

Win Win Bakery sebagai sistem kejadian diskrit, membentuk model Aljabar Max-Plus yang sesuai, menghitung durasi distribusi pada setiap tim pengiriman, serta mengidentifikasi rute-rute yang menyebabkan ketidakseimbangan beban kerja dan hambatan operasional.

Penelitian ini memberikan dua kontribusi utama. Secara teoretis, penelitian ini memperluas penerapan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi produk *bakery* skala regional, sehingga menunjukkan relevansi Aljabar Max-Plus dalam memodelkan sistem logistik yang bersifat berurutan, berbasis waktu, dan bergantung pada kejadian. Secara praktis, penelitian ini menyediakan kerangka analisis terukur bagi UD. Win Win Bakery untuk mengevaluasi durasi distribusi, mengidentifikasi rute yang tidak efisien, serta mendukung pengambilan keputusan dalam penataan ulang rute dan penyeimbangan beban kerja.

## B. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi kasus aplikatif yang dikombinasikan dengan pemodelan matematis berbasis sistem kejadian diskrit. Studi kasus digunakan karena penelitian difokuskan pada sistem distribusi barang pada satu objek empiris, yaitu UD. Win Win Bakery. Sementara itu, pemodelan matematis digunakan untuk merepresentasikan alur distribusi ke dalam bentuk terstruktur melalui Petri Net dan kemudian mentransformasikannya ke dalam model Aljabar Max-Plus. Dengan pendekatan ini, sistem distribusi tidak hanya dijelaskan secara deskriptif, tetapi juga dianalisis melalui hubungan waktu antaraktivitas sehingga durasi proses distribusi dapat dihitung secara lebih terukur.

Penelitian dilaksanakan pada UD. Win Win Bakery yang berlokasi di Kelurahan Hungayonaa, Kecamatan Tilamuta, Kabupaten Boalemo, Provinsi Gorontalo. Pelaksanaan penelitian dilakukan pada bulan Januari sampai Maret 2026. Objek yang dimodelkan adalah proses distribusi barang yang dilakukan oleh sembilan tim distribusi atau kendaraan dengan rute pengiriman yang berbeda-beda. Setiap tim memiliki tahapan distribusi yang meliputi persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan menuju wilayah distribusi, proses pengantaran atau pembongkaran barang, serta perjalanan kembali ke pabrik. Fokus penelitian diarahkan pada pembentukan model waktu distribusi untuk setiap tim sehingga dapat diketahui struktur proses dan durasi distribusi berdasarkan rute masing-masing.

Data yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas data primer dan data sekunder. Data primer diperoleh melalui observasi dan wawancara dengan pihak terkait di UD. Win Win Bakery. Data tersebut mencakup jumlah tim distribusi, jumlah kendaraan, jadwal distribusi, rute pengiriman setiap tim, waktu persiapan kendaraan, waktu pemuatan barang, waktu perjalanan, waktu pembongkaran atau pengantaran barang, serta waktu kembali ke pabrik. Data sekunder diperoleh melalui studi literatur mengenai Petri Net, Aljabar Max-Plus, sistem kejadian diskrit, serta penelitian terdahulu yang relevan. Satuan waktu yang digunakan dalam model adalah menit agar seluruh durasi aktivitas dapat dibandingkan secara konsisten.

Dalam penelitian ini digunakan beberapa asumsi model. Pertama, setiap proses distribusi dipandang sebagai rangkaian kejadian diskrit yang berlangsung secara berurutan. Kedua, durasi setiap aktivitas dianggap deterministik berdasarkan data hasil observasi dan wawancara. Ketiga, setiap tim distribusi dimodelkan secara terpisah sesuai rute masing-masing. Keempat, sistem yang dianalisis dibatasi mulai dari persiapan kendaraan di pabrik sampai kendaraan kembali ke pabrik setelah menyelesaikan distribusi. Kelima, faktor eksternal seperti perubahan cuaca, kondisi lalu lintas yang tidak terduga, kerusakan kendaraan, atau perubahan mendadak pada permintaan pelanggan tidak dimasukkan secara eksplisit ke dalam model.

Tahap awal pemodelan dilakukan dengan membentuk model Petri Net untuk setiap tim distribusi. Petri Net digunakan untuk menggambarkan hubungan antara keadaan dan kejadian dalam proses distribusi. Dalam model ini, *place* merepresentasikan keadaan atau kondisi sistem, misalnya kendaraan siap, barang selesai dimuat, atau kendaraan telah sampai pada wilayah distribusi tertentu. Sementara itu, *transition* merepresentasikan aktivitas atau kejadian, seperti persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan ke wilayah tujuan, pembongkaran barang, dan perjalanan kembali ke pabrik. Hubungan antara *place* dan *transition* dinyatakan dengan *arc*, sedangkan *token* digunakan untuk menunjukkan terpenuhinya atau tidaknya suatu kondisi dalam sistem. Model Petri Net pada penelitian ini dibentuk dengan bantuan perangkat lunak PIPE 4.3.0.

Setelah model Petri Net terbentuk, tahap berikutnya adalah menyusun representasi matriks dari model tersebut. Matriks yang dibentuk meliputi matriks *forward incidence*, matriks *backward incidence*, dan matriks *incidence*. Matriks *forward incidence* menunjukkan hubungan

dari *transition* menuju *place*, sedangkan matriks *backward incidence* menunjukkan hubungan dari *place* menuju *transition*. Matriks *incidence* diperoleh dari selisih antara matriks *forward incidence* dan matriks *backward incidence*.

Formulasi Aljabar Max-Plus dilakukan dengan mendefinisikan setiap aktivitas distribusi sebagai variabel waktu. Jika  $x_i(k)$  menyatakan waktu terjadinya aktivitas ke- $i$  pada periode ke- $k$ , dan  $a_{ij}$  menyatakan durasi atau bobot waktu dari aktivitas  $j$  menuju aktivitas  $i$ , maka relasi umum dalam model Aljabar Max-Plus dapat dituliskan sebagai

$$x_i(k+1) = \max_j (a_{ij} + x_j(k)) \quad (5)$$

Dalam bentuk matriks, sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \quad (6)$$

Dengan  $A$  merupakan matriks Aljabar Max-Plus yang memuat bobot waktu antaraktivitas distribusi.

Prosedur analisis dalam penelitian ini dilakukan secara bertahap. Pertama, peneliti mengidentifikasi komponen sistem distribusi, meliputi tim distribusi, kendaraan, rute, titik tujuan, dan tahapan aktivitas. Kedua, setiap aktivitas distribusi diklasifikasikan sebagai keadaan atau kejadian sehingga dapat direpresentasikan dalam bentuk Petri Net. Ketiga, model Petri Net dibentuk untuk sembilan tim distribusi berdasarkan rute masing-masing. Keempat, dari model Petri Net tersebut disusun matriks *forward incidence*, *backward incidence*, dan *incidence* untuk menunjukkan hubungan struktural antar komponen.

Kelima, variabel waktu didefinisikan berdasarkan durasi setiap aktivitas distribusi. Keenam, variabel-variabel tersebut diformulasikan ke dalam persamaan Aljabar Max-Plus. Ketujuh, persamaan yang diperoleh disusun dalam bentuk matriks Aljabar Max-Plus. Kedelapan, matriks tersebut digunakan untuk menghitung durasi distribusi setiap tim. Tahap terakhir adalah menginterpretasikan hasil perhitungan untuk melihat pola waktu distribusi dan mengidentifikasi rute yang berpotensi menimbulkan ketidakseimbangan beban kerja.

Verifikasi model dilakukan melalui pemeriksaan kesesuaian antara alur distribusi aktual dan struktur Petri Net yang dibentuk. Setiap *place*, *transition*, dan *arc* diperiksa agar sesuai dengan tahapan distribusi yang diperoleh dari hasil wawancara dan observasi. Selain itu, verifikasi matematis dilakukan dengan memeriksa

kesesuaian ukuran matriks, hubungan antar elemen, serta konsistensi nilai durasi pada matriks Aljabar Max-Plus.

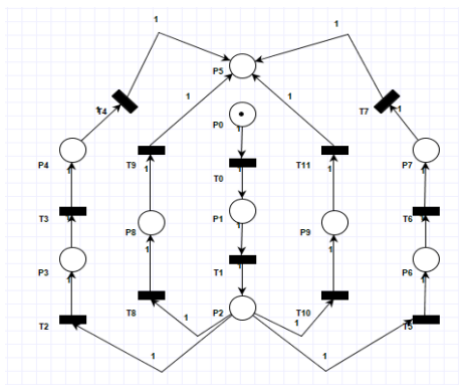
### C. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan hasil pemodelan sistem distribusi barang pada UD. Win Win Bakery menggunakan representasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Hasil yang ditampilkan meliputi pembentukan model Petri Net, representasi matriks, formulasi model Aljabar Max-Plus, serta perhitungan durasi distribusi pada masing-masing tim. Analisis difokuskan pada sembilan tim distribusi yang melayani rute berbeda-beda.

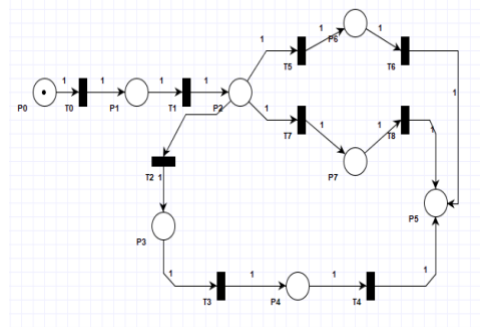
#### Model Petri Net Sistem Distribusi

Berdasarkan hasil identifikasi proses distribusi, setiap tim memiliki alur kerja yang dimulai dari persiapan kendaraan di pabrik, pemuatan barang, perjalanan ke wilayah distribusi, proses pengantaran atau pembongkaran barang, dan perjalanan kembali ke pabrik. Alur tersebut dimodelkan menggunakan Petri Net, dengan *place* merepresentasikan keadaan sistem dan *transition* merepresentasikan keadaan sistem dan *transition* merepresentasikan aktivitas atau kejadian distribusi.

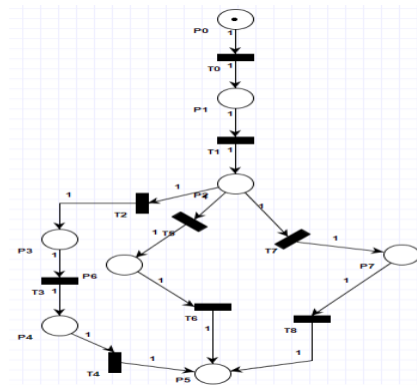
Pada tim 1, model Petri Net terdiri atas 10 *place* dan 12 *transition*. Model menggambarkan distribusi ke beberapa wilayah, yaitu Dulupi, Paguyaman, Marisa, Randangan, Wonosari, dan Tlamuta. Setiap *transition* menunjukkan aktivitas distribusi, sedangkan setiap *place* menunjukkan kondisi setelah suatu aktivitas berlangsung. Model Petri Net untuk tim 2 hingga tim 9 dibentuk dengan prinsip yang sama, tetapi memiliki perbedaan pada jumlah *place*, jumlah *transition*, dan rute distribusi yang dilayani oleh masing-masing tim.



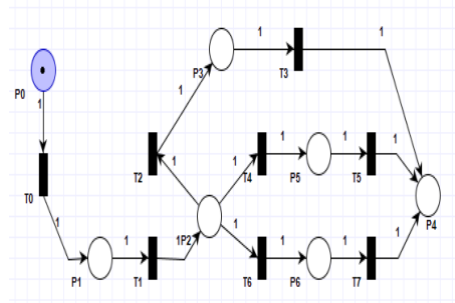
Gambar 1. Model Petri Net Tim 1



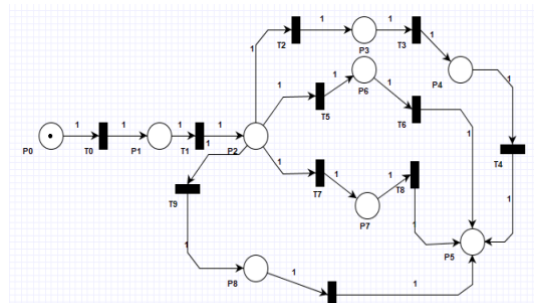
Gambar 2. Model Petri Net Tim 2



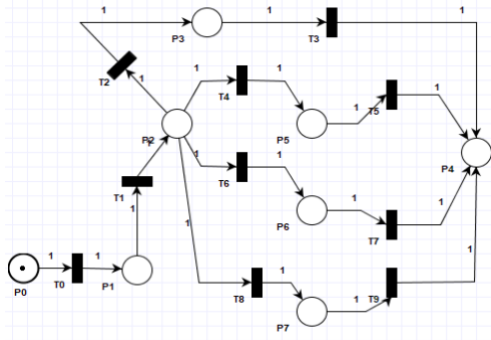
Gambar 3. Model Petri Net Tim 3



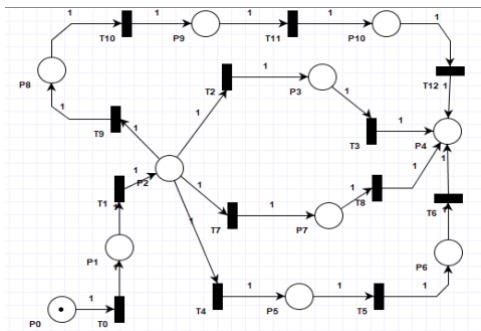
Gambar 4. Model Petri Net Tim 4



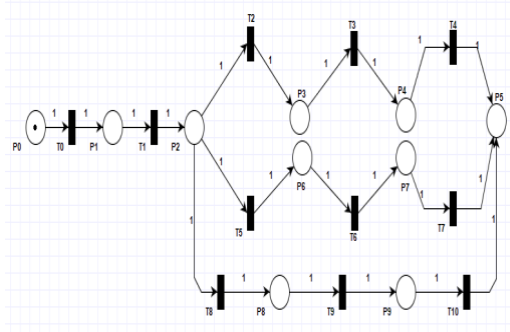
Gambar 5. Model Petri Net Tim 5



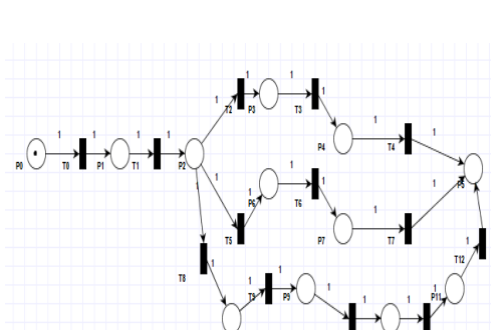
Gambar 6. Model Petri Net Tim 6



Gambar 7. Model Petri Net Tim 7



Gambar 8. Model Petri Net Tim 8



Gambar 9. Model Petri Net Tim 9

Secara umum, struktur model Petri Net yang diperoleh dapat dituliskan sebagai berikut (Subiono, 2015):

$$PN = (P, T, A, W, M_0) \quad (7)$$

Dengan  $P$  menyatakan himpunan *place*,  $T$  menyatakan himpunan *transition*,  $A$  menyatakan himpunan *arc*, dan  $W$  menyatakan bobot hubungan antar elemen, dan  $M_0$  menyatakan *initial marking*. Dalam penelitian ketika kendaraan siap melakukan proses distribusi dari pabrik.

### Representasi Matriks Petri Net Tim 1

Setelah model Petri Net dibentuk, tahap berikutnya adalah menyusun representasi matriks. Matriks yang diperoleh terdiri atas matriks *forward incidence*, matriks *backward incidence*, dan matriks *incidence*. Secara umum, matriks *incidence* dinyatakan sebagai

$$A = A^+ - A^- \quad (8)$$

Dengan  $A^+$  sebagai matriks *forward incidence* dan  $A^-$  sebagai matriks *backward incidence*. Berdasarkan model Petri Net Tim 1, diperoleh representasi matriks sebagai berikut.

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elemen pada matriks-matriks di atas merepresentasikan adanya hubungan antara *place* ke *transition* atau *transition* ke *place*. Nilai 1 menunjukkan adanya keterhubungan, sedangkan nilai 0 tidak adanya keterhubungan. Perhitungan pada matriks *incidence* diperoleh dari hasil pengurangan antara matriks *forward incidence* dan *backward incidence*, sehingga nilai elemennya dapat berupa 0, 1, atau -1 (Adhalia, Pratama, Tungga, Hamdani, & Akkas, 2025).

### Formulasi Model Aljabar Max-Plus

Model Petri Net yang telah dibentuk kemudian di transformasikan ke dalam model Aljabar Max-Plus. Dalam model ini, setiap aktivitas distribusi direpresentasikan sebagai variabel waktu. Untuk tim 1, variabel waktu yang digunakan adalah sebagai berikut:

- $t_0(k)$  = Persiapan kendaraan saat ke- $k$
- $t_1(k)$  = Pemuatan barang saat ke- $k$
- $t_2(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Dulupi saat ke- $k$
- $t_3(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Paguyaman saat ke- $k$
- $t_4(k)$  = Perjalanan kembali pabrik dari wilayah Paguyaman saat ke- $k$
- $t_5(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Marisa saat ke- $k$
- $t_6(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Randangan saat ke- $k$
- $t_7(k)$  = Perjalanan kembali pabrik dari wilayah Randangan saat ke- $k$
- $t_8(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Wonosari saat ke- $k$
- $t_9(k)$  = Perjalanan kembali pabrik dari wilayah Wonosari saat ke- $k$
- $t_{10}(k)$  = Pengantaran barang ke wilayah Tilamuta saat ke- $k$
- $t_{11}(k)$  = Perjalanan kembali pabrik dari wilayah Tilamuta saat ke- $k$

Selanjutnya, disajikan variabel-variabel lamanya waktu pada setiap proses distribusi barang tim 1.

$V_{0,k}$  = Lamanya proses persiapan kendaraan saat ke- $k$

$V_{1,k}$  = Lamanya proses muat barang dalam kendaraan saat ke- $k$

$V_{2,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Dulupi saat ke- $k$

$V_{3,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Paguyaman saat ke- $k$

$V_{4,k}$  = Lamanya perjalanan kembali pabrik dari wilayah Paguyaman saat ke- $k$

$V_{5,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Marisa saat ke- $k$

$V_{6,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Randangan saat ke- $k$

$V_{7,k}$  = Lamanya perjalanan kembali pabrik dari wilayah Randangan saat ke- $k$

$V_{8,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Wonosari saat ke- $k$

$V_{9,k}$  = Lamanya perjalanan kembali pabrik dari wilayah Wonosari saat ke- $k$

$V_{10,k}$  = Lamanya proses mengantarkan barang ke wilayah Tilamuta saat ke- $k$

$V_{11,k}$  = Lamanya perjalanan kembali pabrik dari wilayah Tilamuta saat ke- $k$

Variabel-variabel tersebut kemudian dibentuk kedalam model Aljabar Max-Plus berikut:

$$t_0(k) = V_{0,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_1(k) = V_{1,k} \otimes t_0(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_2(k) = V_{2,k} \otimes t_1(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_3(k) = V_{3,k} \otimes t_2(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} \otimes V_{3,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_4(k) = V_{4,k} \otimes t_3(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} \otimes V_{3,k} \otimes V_{4,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_5(k) = V_{5,k} \otimes t_1(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_6(k) = V_{6,k} \otimes t_5(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} \otimes V_{6,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_7(k) = V_{7,k} \otimes t_6(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} \otimes V_{6,k} \otimes V_{7,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_8(k) = V_{8,k} \otimes t_1(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{8,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_9(k) = V_{9,k} \otimes t_8(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{8,k} \otimes V_{9,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_{10}(k) = V_{10,k} \otimes t_1(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{10,k} \otimes t_0(k-1)$$

$$t_{11}(k) = V_{11,k} \otimes t_{10}(k)$$

$$= V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{10,k} \otimes V_{11,k} \otimes t_0(k-1)$$

### Matriks Aljabar Max-Plus Tim 1

Berdasarkan hasil wawancara diperoleh lamanya waktu proses (dalam menit) untuk tim 1 sebagai berikut:

$$V_{0,k} = 10, V_{1,k} = 15, V_{2,k} = 180, V_{3,k} = 180, V_{4,k} = 60, V_{5,k} = 240, V_{6,k} = 180, V_{7,k} = 90, V_{8,k} = 360, V_{9,k} = 60, V_{10,k} = 300, V_{11,k} = 10.$$

Dengan keadaan  $k = 0$ , maka

$$\begin{bmatrix} t_0(k) \\ t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \\ t_5(k) \\ t_6(k) \\ t_7(k) \\ t_8(k) \\ t_9(k) \\ t_{10}(k) \\ t_{11}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh hasil perhitungan matriks Aljabar Max-Plus sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \\ t_9(1) \\ t_{10}(1) \\ t_{11}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{0,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} \otimes V_{3,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{2,k} \otimes V_{3,k} \otimes V_{4,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} \otimes V_{6,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{5,k} \otimes V_{6,k} \otimes V_{7,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{8,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{8,k} \otimes V_{9,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{10,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ V_{0,k} \otimes V_{1,k} \otimes V_{10,k} \otimes V_{11,k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 205 \\ 385 \\ 445 \\ 265 \\ 445 \\ 535 \\ 385 \\ 445 \\ 325 \\ 335 \end{bmatrix}$$

Berikut ini disajikan hasil perhitungan waktu distribusi tim 1 dalam Tabel 1.

**Tabel 1. Hasil Perhitungan Waktu Distribusi Tim 1**

| Tim | Rute             | Waktu Total | Konversi Waktu |
|-----|------------------|-------------|----------------|
| 1   | Dulupi-Paguyaman | 445 menit   | 7 jam 25 menit |

| Tim | Rute             | Waktu Total | Konversi Waktu |
|-----|------------------|-------------|----------------|
| 2   | Marisa-Randangan | 535 Menit   | 8 jam 55 menit |
| 3   | Wonosari         | 445 menit   | 7 jam 25 menit |
| 4   | Tilamuta         | 335 Menit   | 5 jam 35 menit |

### Matriks Aljabar Max-Plus Tim 2 sampai tim 9.

Selanjutnya untuk Tim 2 hingga Tim 9, data waktu diperoleh melalui wawancara dengan prosedur yang sama seperti Tim1. Oleh karena itu, matriks Aljabar Max-Plus untuk masing-masing tim dibentuk berdasarkan model Petri Net dan data waktu yang diperoleh.

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 2 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 2.125 \\ 3.685 \\ 4.315 \\ 3.445 \\ 3.775 \\ 1.525 \\ 1.675 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 3 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 460 \\ 1.540 \\ 1.690 \\ 1.525 \\ 1.675 \\ 415 \\ 505 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 4 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(k) \\ t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \\ t_5(k) \\ t_6(k) \\ t_7(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 1.495 \\ 1.615 \\ 1.555 \\ 1.705 \\ 1.795 \\ 2.215 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 5 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(k) \\ t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \\ t_5(k) \\ t_6(k) \\ t_7(k) \\ t_8(k) \\ t_9(k) \\ t_{10}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 1.855 \\ 3.475 \\ 3.685 \\ 1.915 \\ 2.455 \\ 1.915 \\ 2.455 \\ 3.625 \\ 4.135 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 6 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \\ t_9(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 325 \\ 335 \\ 385 \\ 445 \\ 355 \\ 385 \\ 340 \\ 355 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 7 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \\ t_9(1) \\ t_{10}(1) \\ t_{11}(1) \\ t_{12}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 1.735 \\ 2.125 \\ 1.585 \\ 3.175 \\ 3.325 \\ 3.685 \\ 4.225 \\ 775 \\ 2.095 \\ 3.415 \\ 3.655 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 8 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(k) \\ t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \\ t_5(k) \\ t_6(k) \\ t_7(k) \\ t_8(k) \\ t_9(k) \\ t_{10}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 235 \\ 505 \\ 595 \\ 540 \\ 1.530 \\ 1.680 \\ 565 \\ 1.585 \\ 1.705 \end{bmatrix}$$

Matriks Aljabar Max-Plus Tim 9 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_0(1) \\ t_1(1) \\ t_2(1) \\ t_3(1) \\ t_4(1) \\ t_5(1) \\ t_6(1) \\ t_7(1) \\ t_8(1) \\ t_9(1) \\ t_{10}(1) \\ t_{11}(1) \\ t_{12}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 540 \\ 1.530 \\ 1.680 \\ 235 \\ 505 \\ 595 \\ 325 \\ 540 \\ 810 \\ 1.635 \\ 1.860 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Aljabar Max-Plus yang telah diperoleh, selanjutnya dilakukan perhitungan untuk menentukan durasi distribusi pada setiap Tim. Hasil perhitungan tersebut disajikan dalam Tabel 2 yang memuat dengan waktu tempuh terpanjang pada masing-masing tim.

**Tabel 2.** Hasil Waktu Distribusi dan Rute Terlama pada Setiap Tim

| Tim | Rute Terlama                      | Waktu Total |
|-----|-----------------------------------|-------------|
| 1   | Marisa-Randangan                  | 535 menit   |
| 2   | Toboli-Parigi                     | 4.315 menit |
| 3   | Paguyaman-Kabila                  | 1.690 menit |
| 4   | Lolak                             | 2.215 menit |
| 5   | Kotamobagu                        | 4.135 menit |
| 6   | Paguyaman                         | 445 menit   |
| 7   | Ampibabo                          | 4.225 menit |
| 8   | Kwandang-Bongomeme                | 1.705 menit |
| 9   | Tibawa-Batudaa-Kwandang-Atinggola | 1.860 menit |

Berdasarkan tabel 2, terlihat adanya perbedaan waktu distribusi yang signifikan antara tim. Tim 2, 5, dan 7 memiliki durasi yang lebih lama dibandingkan tim lainnya, yang menunjukkan ketidakseimbangan beban distribusi. Rute dengan durasi terpanjang tersebut dapat diidentifikasi sebagai *bottleneck* dalam sistem distribusi.

### Pembahasan Hasil

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa proses distribusi barang pada UD. Win Win Bakery dapat direpresentasikan secara matematis

sebagai sistem kejadian diskrit melalui kombinasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Secara matematis, setiap aktivitas distribusi, seperti persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan ke wilayah tujuan, pembongkaran barang, dan perjalanan kembali ke pabrik, dapat dipandang sebagai kejadian yang memiliki durasi tertentu. Hubungan antaraktivitas tersebut kemudian dinyatakan dalam bentuk ketergantungan waktu, yaitu suatu aktivitas hanya dapat dimulai setelah aktivitas sebelumnya selesai. Dalam kerangka Aljabar Max-Plus, kondisi ini direpresentasikan melalui operasi maksimum dan penjumlahan, sehingga dinamika waktu distribusi dapat diformulasikan secara lebih terstruktur dibandingkan dengan analisis deskriptif biasa.

Secara khusus, hasil perhitungan menunjukkan adanya variasi durasi distribusi yang signifikan antar tim. Tim 2 dengan rute Toboli–Parigi membutuhkan waktu 4.315 menit, Tim 7 dengan rute Ampibabo membutuhkan waktu 4.225 menit, dan Tim 5 dengan rute Kotamobagu membutuhkan waktu 4.135 menit. Nilai ini jauh lebih tinggi dibandingkan dengan beberapa tim lain, misalnya Tim 6 yang memiliki waktu distribusi 445 menit pada rute Paguyaman dan Tim 1 yang memiliki waktu terlama 535 menit pada rute Marisa–Randangan. Secara matematis, perbedaan durasi tersebut menunjukkan adanya jalur distribusi dengan bobot waktu yang dominan dalam sistem. Jalur dengan bobot waktu terbesar dapat dipandang sebagai kandidat *critical path* secara operasional, meskipun penelitian ini belum melakukan analisis formal terhadap *critical circuit*, *eigenvalue*, atau *cycle time* Max-Plus.

Temuan tersebut menjawab tujuan penelitian karena model yang dibangun mampu menghasilkan informasi waktu distribusi yang terukur untuk setiap tim. Tujuan utama penelitian ini adalah membentuk model Aljabar Max-Plus dengan representasi Petri Net untuk menganalisis waktu distribusi produk *bakery*. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa pendekatan tersebut dapat digunakan untuk menghitung durasi distribusi, membandingkan beban waktu antar tim, dan mengidentifikasi rute yang berpotensi menjadi sumber keterlambatan. Dengan kata lain, model tidak hanya berfungsi sebagai representasi visual

proses distribusi, tetapi juga menghasilkan keluaran kuantitatif yang dapat digunakan untuk mengevaluasi efisiensi sistem.

Dari sisi gap penelitian, hasil ini mengisi kekosongan kajian pada penerapan Aljabar Max-Plus dalam sistem distribusi produk bakery skala regional. Penelitian terdahulu telah menerapkan Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada sistem produksi, rantai pasok, pengadaan obat, penjadwalan proyek, dan sistem antrean. Namun, penerapannya pada distribusi produk *bakery* dengan beberapa tim dan rute regional masih belum banyak dikaji. Berbeda dari penelitian sebelumnya, penelitian ini tidak hanya membangun model proses, tetapi juga menggunakan hasil perhitungan waktu untuk menunjukkan adanya ketidakseimbangan beban distribusi antar tim. Hal ini memperkuat posisi penelitian sebagai studi aplikatif yang menghubungkan formulasi matematis dengan persoalan nyata dalam distribusi produk yang sensitif terhadap waktu.

Temuan penelitian ini konsisten dengan studi Rauf et al. (2021), yang menekankan bahwa Petri Net relevan untuk menggambarkan proses yang memiliki keterurutan, sinkronisasi, dan ketergantungan antaraktivitas. Hasil ini juga sejalan dengan Mustofani et al. (2022), yang menggunakan pendekatan Aljabar Max-Plus dan Petri Net untuk menganalisis ketepatan waktu dalam pengadaan obat. Sementara itu, keterkaitan dengan Sholehurrohman et al. (2024) terlihat pada penggunaan Aljabar Max-Plus untuk menghitung waktu dalam sistem distribusi. Perbedaannya terletak pada konteks aplikasi, karena penelitian ini memusatkan perhatian pada distribusi produk *bakery* di tingkat regional dengan sembilan tim distribusi yang memiliki struktur rute berbeda.

Dari perspektif teoritis, penelitian ini memperluas penerapan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi barang yang memiliki karakteristik berurutan, berbasis waktu, dan melibatkan beberapa jalur distribusi. Kontribusi teoretisnya terletak pada penggunaan Petri Net sebagai representasi struktural sebelum sistem diformulasikan ke dalam model Aljabar Max-Plus. Petri Net membantu memperjelas hubungan antaraktivitas, sedangkan Aljabar Max-Plus memberikan kerangka matematis untuk menghitung waktu penyelesaian distribusi. Dengan demikian, penelitian ini menunjukkan bahwa integrasi kedua pendekatan tersebut dapat digunakan untuk memodelkan distribusi produk bakery sebagai sistem kejadian diskrit yang terukur.

Hasil penelitian ini memperluas penerapan Aljabar Max-Plus dengan menunjukkan bahwa pendekatan tersebut tidak hanya relevan untuk sistem produksi dan antrian, tetapi juga dapat diterapkan pada sistem distribusi produk pangan skala usaha regional. Dalam konteks ini, Aljabar Max-Plus berfungsi sebagai alat analisis waktu yang mampu menunjukkan rute dengan durasi terbesar. Meskipun penelitian belum sampai pada analisis nilai eigen, vektor eigen, atau *cycle mean*, model yang dibangun telah menyediakan dasar matematis untuk pengembangan analisis tersebut pada penelitian lanjutan. Jika data distribusi periodik tersedia secara lengkap, model ini dapat dikembangkan untuk menghitung *cycle time*, menentukan *critical circuit*, dan mengevaluasi kestabilan jadwal distribusi dalam jangka panjang.

Dari perspektif praktis, hasil penelitian ini memberikan informasi penting bagi UD. Win Win Bakery dalam mengevaluasi efisiensi distribusi. Rute dengan waktu sangat panjang, seperti Toboli–Parigi, Ampibabo, dan Kotamobagu, menunjukkan adanya ketidakseimbangan beban kerja antar tim. Kondisi ini dapat berdampak pada meningkatnya biaya operasional, keterlambatan pengiriman, penurunan kualitas kesegaran produk, serta lambatnya perputaran modal. Oleh karena itu, hasil model dapat digunakan sebagai dasar untuk menata ulang pembagian wilayah distribusi, mengevaluasi jumlah kendaraan dan tim pada rute tertentu, serta mempertimbangkan strategi pengelompokan ulang rute agar waktu distribusi lebih seimbang.

Implikasi hasil penelitian juga berkaitan dengan pengambilan keputusan operasional. Model Aljabar Max-Plus yang dihasilkan dapat menjadi alat bantu untuk mengevaluasi skenario distribusi. Misalnya, perusahaan dapat membandingkan perubahan waktu distribusi apabila rute tertentu dipisahkan, digabungkan, atau dialihkan ke tim lain. Selain itu, model ini juga dapat digunakan untuk mengidentifikasi aktivitas yang membutuhkan waktu dominan, seperti perjalanan antar daerah, proses muat, atau perjalanan kembali ke pabrik. Dengan demikian, model tidak hanya menjelaskan kondisi distribusi saat ini, tetapi juga dapat menjadi dasar untuk perencanaan distribusi yang lebih efisien.

Meskipun demikian, hasil penelitian ini memiliki beberapa keterbatasan yang perlu diakui secara akademik. Pertama, durasi aktivitas yang digunakan dalam model bersifat deterministik berdasarkan hasil observasi dan wawancara, sehingga belum mencerminkan variasi waktu

akibat kondisi lalu lintas, cuaca, gangguan kendaraan, atau perubahan permintaan pelanggan. Kedua, penelitian ini belum menyajikan analisis *eigenvalue*, *eigenvector*, *cycle time*, dan *critical circuit* secara formal, sehingga identifikasi rute kritis masih didasarkan pada durasi distribusi terlama, bukan pada analisis periodik Max-Plus yang lebih mendalam. Ketiga, model dibangun berdasarkan kondisi distribusi pada satu objek studi, yaitu UD. Win Win Bakery, sehingga generalisasi ke sistem distribusi lain perlu dilakukan secara hati-hati. Keempat, validasi model masih dapat diperkuat dengan membandingkan hasil perhitungan Max-Plus dengan data aktual distribusi dalam beberapa periode operasional.

#### **D. Kesimpulan dan Saran**

Penelitian ini telah mengembangkan model matematis untuk menganalisis waktu distribusi produk bakery pada UD. Win Win Bakery dengan mengintegrasikan representasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Petri Net digunakan untuk menggambarkan struktur proses distribusi berbasis kejadian, mulai dari persiapan kendaraan, pemuatan barang, perjalanan menuju wilayah distribusi, pembongkaran barang, hingga perjalanan kembali ke pabrik. Selanjutnya, Aljabar Max-Plus digunakan untuk memformulasikan hubungan ketergantungan waktu antaraktivitas dan menghitung total durasi distribusi pada setiap tim pengiriman. Hasil penelitian menunjukkan adanya variasi waktu distribusi yang signifikan antartim, terutama pada rute Toboli–Parigi, Ampibabo, dan Kotamobagu, yang mengindikasikan ketidakseimbangan beban kerja serta potensi bottleneck dalam sistem distribusi.

Model Aljabar Max-Plus yang diusulkan memberikan kerangka analisis yang terstruktur dan terukur untuk menjawab permasalahan penelitian, yaitu bagaimana proses distribusi dapat direpresentasikan secara matematis dan bagaimana rute dengan waktu distribusi terlama dapat diidentifikasi. Kontribusi utama penelitian ini terletak pada perluasan penerapan Aljabar Max-Plus pada sistem distribusi produk bakery skala regional dengan dukungan Petri Net sebagai representasi alur proses. Secara teoretis, penelitian ini memperkuat relevansi Aljabar Max-Plus dalam pemodelan sistem kejadian diskrit yang melibatkan keterurutan aktivitas, sinkronisasi waktu, dan ketergantungan antarproses. Secara praktis, model ini menyediakan dasar analitis bagi UD. Win Win Bakery untuk mengevaluasi durasi rute,

mengidentifikasi pola distribusi yang kurang efisien, serta mendukung pengambilan keputusan terkait penataan ulang rute dan penyeimbangan beban kerja antar tim.

Meskipun demikian, penelitian ini memiliki keterbatasan karena data waktu yang digunakan masih bersifat deterministik dan diperoleh melalui observasi serta wawancara, sehingga belum memasukkan variasi akibat kondisi lalu lintas, cuaca, gangguan kendaraan, atau perubahan permintaan pelanggan. Selain itu, penelitian ini belum mencakup analisis formal terhadap nilai eigen Max-Plus, vektor eigen, cycle time, dan critical circuit. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan model dengan memasukkan variasi waktu perjalanan, kapasitas kendaraan, volume permintaan, dan jadwal distribusi periodik. Pengembangan lebih lanjut juga dapat diarahkan pada analisis berbasis eigenvalue dan critical circuit untuk memperoleh model penjadwalan distribusi yang lebih optimal, dinamis, dan sesuai bagi logistik produk mudah rusak.

#### E. Daftar Pustaka

- Adhalia, N. F. H., Pratama, A. P., Tungga, R. A., Hamdani, I. M., & Akkas, A. Bin. (2025). Pemodelan rute perjalanan kapal motor Bukit Siguntang menggunakan Petri Net. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 8(2), 685–692.
- Bhardwaj, M., & Agrawal, R. (2020). Operational efficiency of perishable product supply chain using Petri Net technique. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 2126–2133. Dubai, UAE.
- Clarisa, Rahma, F. L., Nur, F., Hasibuan, K., Khodijah, N., & Maysarah, S. (2021). Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Mahasiswa Pendidikan Matematika Dalam Memecahkan Masalah Struktur Aljabar Ring Materi Daerah Integral Dan Field. *FARABI: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 4(1), 52–60. <https://doi.org/https://doi.org/10.47662/farabi.v4i1.93>
- Doberhol, J., Suroto, & Guswanto, B. H. (2024). Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Atas Aljabar Max-Plus Dan Aplikasinya Menggunakan Visual Studio. *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Pendidikan Matematika (JMP)*, 16(2), 185–200.
- Khairina, I. N., A'yun, Q. Q., & Sandarirria, H. (2025). Aplikasi Aljabar Max-Plus dan Petri Net dalam penentuan waktu optimal produksi tempe di Pabrik Tempe Asli HB Samarinda. *Journal of Mathematics Education and Science*, 8(1), 38–49.
- Khotimah, S. H., A'yun, Q. Q., & Wasono. (2024). Pemodelan Sistem Antrean Pelayanan Pembayaran Pajak Kendaraan Bermotor Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus di Samsat MT Haryono Samarinda. *Journal of Mathematics Education and Science*, 7(1), 65–75. <https://doi.org/https://doi.org/10.32665/james.v7il.1935>
- Kismanti, S. T., & Indriyani, D. (2021). Penerapan aljabar pada sistem produksi. *Jurnal Borneo Saintek*, 4(1), 37–42.
- Mustofani, D., Farida, U., & Ariadhita, B. Y. (2022). Model matematika perencanaan dan pengadaan obat di instalasi farmasi rumah sakit dengan menggunakan aljabar Max Plus. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, 8(2), 15–20.
- Nabilasalva, A., & Nurdiani, T. W. (2024). Pentingnya layanan logistik dari produsen ke konsumen yang dilaksanakan oleh PT. Sinarmas Distribusi Nusantara dalam pemasaran produk. *Jurnal Pengabdian Masyarakat*, 1(1), 303–306.
- Putri, D. P. A., & Sukardi, A. (2023). Analisis Pengaruh Distribusi dan Harga Terhadap Peningkatan Penjualan Produk. *MENAWAN: Jurnal Riset Dan Publikasi Ilmu Ekonomi*, 1(6), 42–50.
- Rauf, M. D. A., Nurwan, Yahya, L., & Nuha, A. R. (2021). Model penjadwalan proyek pembangunan perumahan Menggunakan Petri Net dan aljabar Max-Plus. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika (JES-MAT)*, 7(1), 31–42.
- Sakta, R. R., Yanita, & Helmi, M. R. (2022). Aljabar Max-Plus serta aplikasinya pada sistem antrian. *Jurnal Matematika UNAND*, 11(4), 271–283.
- Sholehurrohman, R., Iلمان, I. S., Hermanto, B., & Muhaqiqin. (2024). Sistem distribusi sederhana penjualan kopi Lampung menggunakan aljabar Max-Plus. *Ilmu Komputer Unila*, 12(1), 19–28.
- Simanjuntak, S. N., Sahputra, N., & Firah, A. (2024). Pengaruh persediaan barang dan

saluran distribusi terhadap volume penjualan pada PT. Everbright di Medan. *Jurnal Ilmiah Manajemen Dan Bisnis*, 18(2), 414–425.

Subiono. (2015). *Aljabar min-max plus dan terapannya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.