FARABI
Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
p-ISSN 2623-2332
e-ISSN 2798-5474

Fungsi Pembangkit Momen dari Distribusi Probabilitas Diskrit

Joni Wilson Sitopu[1], Siswadi[2]
[1]FKIP Universitas Simalungun
[2]Fakultas Teknik, Universitas Singaperbangsa Karawang
Email: jwsitopu@gmail.com

ABSTRAK

Distribusi jumlah dari dua atau lebih variabel acak. Sementara itu, studi tentang distribusi selisih antara dua variabel acak masih jarang dilakukan, terutama pada variabel acak diskrit. Dari sekian banyak literatur atau buku yang membahas tentang momen faktorial ke-k suatu pendistribusian, masih dalam lingkup yang sangat terbatas, kebanyakan hanya terbatas pada momen pertama dan kedua. Jadi pada artikel ini penulis mengkaji sampai dengan momen faktorial ke-k dari distribusi probabilitas diskrit. Artikel ini berfokus pada perumusan model distribusi probabilitas dan fungsi pembangkit momen variabel acak diskrit, yaitu yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel S yang assosiatif pada percobaan acak. suatu percobaan (*trial*) dilakukan secara berulang-ulang sehingga menghasilkan sebanyak n percobaan, misalnya munculnya suatu kejadian (*event*) adalah sukses dan tidak munculnya suatu kejadian tersebut adalah gagal, Metode yang digunakan untuk menentukan distribusi adalah metode yang dapat untuk menyelesaikan masalah. Karakteristik distribusi diturunkan melalui sifat-sifat momen faktorial ke-k. Berdasarkan hasil dari pembahasan diperoleh model distribusi probabilitas dan fungsi pembangkit momen variabel acak diskrit sebagai berikut:

1. Distribusi Binomial, $M_X(t) = (q + pe^t)^n$, 2. Distribusi Binomial Negatif. $M_X(t) = \frac{p^n}{(1-qe^t)^n}$,
3. Distribusi Geometrik, $M_X(t) = p(\frac{1}{1-qe^t})$., 4. Distribusi Poisson, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, 5. Distribusi Trinomial, $M_X(t_1,t_2) = (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3)^n$, dan 6. Distribusi Multinomial, $M_X(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}) = (p_1e^{t_1} + \ldots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$.

Kata Kunci : *Distribusi Probabilitas Diskrit, Fungsi Pembangkit Momen*

ABSTRACT

Distribution of the sum of two or more random variables. Meanwhile, studies on the distribution of the difference between two random variables are still rarely carried out, especially on discrete random variables. Of the many literatures or books that discuss the k-th factorial moment of a distribution, it is still in a very limited scope, mostly limited to the first and second moments. So in this article the author examines up to the k-th factorial moment of the discrete probability distribution. This article focuses on the formulation of a probability distribution model and a discrete random variable moment generation function, which is associated with a real number for each element in the associative sample space S in a random experiment. an experiment (trial) is carried out repeatedly so that as many as n trials, for example the emergence of an event (event) is a success and the absence of an event is a failure. The method used to determine the distribution is a method that can solve the problem. distribution characteristics are derived through the properties of the k-th factorial moment. Based on the discussion of the variables, the probability distribution model and discrete random moment generation function are obtained as follows:

1. *Binomial Distribution*, $M_X(t) = (q + pe^t)^n$, 2. *Negative Binomial Distribution*. $M_X(t) = \frac{p^n}{(1-qe^t)^n}$,
3. *Geometric distribution*, $M_X(t) = p(\frac{1}{1-qe^t})$., 4. *Poisson distribution*, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, 5. *Distribution Trinomial*, $M_X(t_1,t_2) = (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3)^n$, *and* 6. *Multinomial distribution*, $M_X(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}) = (p_1e^{t_1} + \ldots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$.

Keywords: *Discrete Probability Distribution, Moment Generating Function*

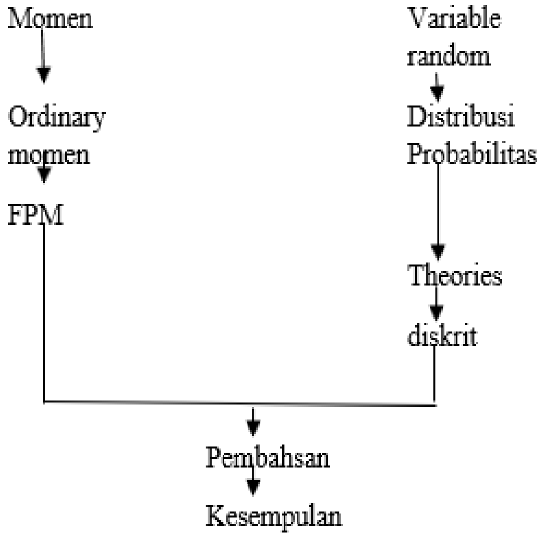
A. Pendahuluan

Distribusi probabilitas merupakan suatu model probabilitas yang memungkinkan untuk mempelajari hasil-hasil percobaan random yang rill dan menduga hasil-hasil yang akan terjadi, jika, 1) peristiwa peristiwa rill tersebut merupakan peristiwa peristiwa dalam model dan 2) kondisi kondisi dari model distribusi dapat dipenuhi sebagai kondisi kondisi percobaan. Distribusi probabilitas tersebut merupakan distribusi populasi karena berhubungan dengan semua nilai nilai yang mungkin terjadi dan populasinya merupakan variable random. Hal demikian dapat mencari model distribusi yang sesuai atau standard guna menggambarkan perilaku dari data dan melakukan deduksi darinya. Dari model beberapa distribusi probabilitas variable random diskrit dan kontinu yang tertetu dapat ditentukan ekspektasi, variansi dan fungsi pembangkit momen jika ada, jika fungsi pembangkit momen dari distribusi probabilitas tidak ada, maka fungsi pembangkit momen karakteristik selalu dapat ditentukan. (dalam Sitopu. Joni Wilson, dkk. (2022)).

Fungsi pembangkit momen (*Moment Generating Function*) adalah merupakan ekspektasi yang khusus. Fungsi Pembangkit momen ini layaknya sebuah jembatan yang menghubungkan Matematika diskrit dan kontinu, khususnya pada bagian teori variabel kompleks. Namun, pembahasan Fungsi Pembangkit dalam artikel ini hanyalah sekedar memberikan ide utama, karena banyak sekali hal-hal yang dapat dibahas menyangkut Fungsi Pembangkit momen variable random diskrit ini. (dalam Sitopu. Joni Wilson, dkk. (2022)).

B. Metode Penelitian

Dalam artikel ini, metode yang digunakan adalah metode Fungsi Pembangkit momen yaitu yaitu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan. Untuk menentukan masalah pada Fungsi Pembangkit momen digunakan langkah seperti gambar 1 dibawah ini,



Gambar 1. Metode Penelitian

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut;

1. Mengkaji variable random diskrit
2. Mengkaji distribusi probabilitas teoritis yang diskrit
3. Mengkaji momen distribusi probabilitas diskrit
4. Mengkaji dan membuktikan fungsi pembangkit momen distribusi probabilitas diskrit.

C. Hasil dan Pembahasan

PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan beberapa definisi dan teorema fungsi distribusi yang dikutip dari beberapa sumber yang berbeda sebagai berikut:

1. Variabel Random Diskrit

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976) Mengemukakan, misalkan X bilangan riel bersifat assosiatif dengan hasil dari percobaan acak E. Misalkan bilangan real asositif dengan hasil percobaan acak E. jika E adalah percobaan acak yang terdiri dari dua pelemparan uang logam, maka X, jumlah kepala, akan mengambil nilai $0, 1$ atau 2. menyajikan hasilnya dan nilai dalam bentuk tabel berikut;

Tabel 1. Variabel Random

Hasil (w)	TT	TH	HT	HH
Nilai dari X (w)	0	1	1	2

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)

Dengan demikian jelas bahwa untuk hasil w dari E. Ada bilangan riel yang sesuai dari $X(w)$. Lebih lanjut karena titik sampel sesuai dengan hasil, maka dapat disimpulkan bahwa $X(w)$ didefinisikan untuk setiap $w \epsilon S$, maka ruang sampel dan variabel acak didefinisikan ke fungsi riel pada S. Secara eksplisit, kami mendefinisikan variabel acak satu dimensi sebagai fungsi bernilai riel yang didefinisikan sebagai ruang sampel S yang assosiatif kami memberikan percobaan acak. selanjutnya, jika w adalah hasil dan $X(w)$ adalah fungsi dan rentang bernilai nyata $(-\backsim, +\backsim)$ dengan domain S, maka untuk setiap bilangan riel, kejadiannya adalah $(w: X(w) \leq a)$. kita katakan bahwa $P(X \leq a)$ adalah probabilitas dari himpunan hasil w dimana $X(w) \leq a$, yaitu;

$$P(X \leq a) = P(w : X(w) \leq a).$$

Variabel random adalah suatu fungsi yang menghubungkan sebuah bilangan riil dengan setiap unsur didalam ruang sampel S. Untuk menyatakan variabel random digunakan sebuah huruf besar, misalkan X. Sedangkan huruf kecilnya, misalkan x, menunjukkan salah satu dari nilainya.

Definisi 1:

Misalkan X suatu variable random dan A suatu set dari ruang dimensi-1 yang finite (terhingga) atau yang countable infinite (tak berhingga), didefinisikan suatu fungsi di A, sehingga:

1. $f(x) \geq 0 ; x \,\varepsilon\, A$
2. $\sum_x f(x) = 1$

Variabel random X disebut variable random diskrit dan f(x) yang memenuhi kedua sifat tersebut disebut discrete probability density function (fungsi kepadatan probabilitas diskrit (fkp diskrit). (Sitopu, Joni Wilson. (1990))

Definisi 2.

Misalkan X suatu variable random yang didefinisikan dalam ruang sampel S, harga harga yang mungkin untuk X adalah, $x_1, x_2, \dots, x_k$ dengan probabilitas masing masing $p_1 = P(X = x_1)$, …, $p_k = P(X=x_k) = 1$. Maka distribusi probabilitas X diberikan dalam table sebagai berikut:

Table 2. Distribusi probabilitas X

Probabilitas X	p_1	p_2	…	p_i	…	p_k
Harga X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)

Definisi 3.

Jika X_1 dan X_2 dua variable random diskrit yang didefinisikan pada A dan didefinisikan fungsi probabilitas gabungan (joint probability function) $f(x_1, x_2)$ di A sehingga ;

a. $f(x_1, x_2) \geq 0 ; (x_1, x_2) \varepsilon A$

b. $\sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = 1$

Maka $f(x_1, x_2)$ disebut fkp gabungan diskrit.

2. Distribusi Probabilitas Diskrit

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976). Mengemukakan, Peluang atau yang sering disebut sebagai probabilitas dapat dipandang sebagai cara untuk mengungkapkan ukuran ketidakpastian/ ketidakyakinan/ kemungkinan suatu peristiwa terjadi atau tidak terjadi. Untuk menyatakan suatu ketidakpastian atau kepastian diperlukan permodelan matematis yang secara teoritis dinyatakan dengan sebaran atau distribusi. Nilai probabilitas suatu kejadian dalam suatu percobaan tersebar di antara 0 dan 1 atau antara 0% dan 100%. Jika probabilitas/peluang suatu kejadian A terjadi dilambangkan dengan notasi P(A) maka, probabilitas [bukan A] atau komplemen A, atau probabilitas suatu kejadian A tidak akan terjadi, adalah 1 - P(A). Secara sederhana peluang suatu kejadian terjadi atau tidak dapat direpresentasikan pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. peluang suatu kejadian terjadi atau tidak.

Tipe representasi	Peristiwa terjadi	Peristiwa tidak terjadi
Persentase	100%	0%
Bilangan bulat	1	0
Notasi peluang	P[A]	1–P[A]

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)

Pada aplikasi di kehidupan sehari-hari, distribusi peluang sangat berguna untuk menganalisis terjadinya suatu peristiwa atau kejadian, jika kejadian bersifat berhingga maka objek distribusinya berbeda dengan kejadian yang tak berhingga. Objek dari distribusi peluang adalah variabel acak dimana objek ini merupakan suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel. Jenis-jenis distribusi perlu dipahami sebagai dasar penentuan uji kebolehjadian. Dan dalam hubungannya dengan pengujian objek percobaan, pemilihan distribusi akan mempermudah penghitungan peluang. Ditinjau dari objek kajian distribusi peluang akan dikenal istilah variabel (peubah) acak yang diklasifikasikan dalam kelompok besar yaitu variabel (peubah) acak diskrit dan kontinyu, dimana masing-masing variabel memiliki beberapa jenis distribusi. (Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)).

Pada sebarang jenis percobaan yang dilakukan maka setiap proses yang melalui proses pengukuran akan mendapatkan suatu kemungkinan-kemungkinan. Kemungkinan pada percobaan akan menghasilkan suatu hasil numerik. Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu variberl acak.

Sheldon Ross, (2010). Mengemukakan, Sebuah variabel acak yang dapat mengambil paling banyak jumlah nilai yang mungkin dapat dihitung dikatakan diskrit. Untuk variabel acak diskrit X, didefinisikan fungsi kepadatan probabilitas p(a) dari X dengan,

$$p(a) = P\{X = a\}$$

Fungsi kepadatan probabilitas p(a) positif untuk paling banyak sejumlah nilai a yang dapat dihitung. Artinya, jika X harus mengasumsikan salah satu nilai x_1, x_2 , ... , x_i maka,

$p(x_i) \geq 0$, untuk i = 1, 2, ... n

$p(x) = 0$, untuk nilai lainnya dari x

Karena X, diambil dari salah satu nilai x_i, maka diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(xi) = 1$$

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau sederetan angka yang banyaknya sebanyak bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit sedangkan variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah variabel acak diskrit. Variabel acak diskrit X menentukan distribusi peluang apabila untuk nilai-nilai $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ terdapat peluang p (x_i) sehingga:

$\sum_{i=1}^{n} p(xi) = 1$; Sheldon Ross, (2010)

p(x) disebut fungsi peluang untuk variabel acak X pada harga X = x

Suatu nilai yang diharapkan akan menjadi kejadian dapat dipandang sebagai nilai harapan atau dinyatakan dengan (X) dibaca "**ekspektasi**". Dimana nilai harapan suatu variabel acak dapat diperoleh dengan mengalikan tiap nilai variabel acak tersebut dengan peluangnya dan menjumlahkan hasilnya, yaitu:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} xi.p(xi)$$

3. Momen Distribusi Probabilitas diskrit

Hogg, Robert V, Allen T. (1978), mengemukan bahwa, suatu distribusi probabilitas dipandang sebagai distribusi dari berat (weight) sepanjang sumbu X. Mean dari distribusi adalah;

$\mu = E(X) = \sum_{x \epsilon A} x\, f(x)$: X diskrit

Yaitu perhitungan dari deviasi X dari perkalian dasar dengan mengkorespondensikan probabilitas atau weight. Dalam fisika keadaan demikian disebut momen pertama. Selanjutnya dengan cara yang sama didefinisikan momen ke-k, dinotasikan μ'_k, ditulis: $\mu'_k = E(X^k)$, disebut **ordinary moment**.

Momen dari distribusi $\mu'_1, \mu'_2, \dots$, kadang-kadang berpasangan dengan distribusi dari sekumpulan karakteristik . jika distribusi digerakkan pada sumbu X, tetapi bayangannya dikiri tampa berubah, maka semua momen distribusi akan berubah.

Untuk memperoleh karakteristik kiri dengan momen distribusi demikian didefinisikan momen sentral sebagai berikut ; $\mu_k = E((X - \mu)^k)$ disebut momen sentral ke-k

untuk distribusi diskrit, **ordinary momen** dapat ditentukan dengan menggunakan

momen factorial yang didefinisikan sebagai berikut ;
μ^*_k = E(X(X – 1) … (X – k + 1)) disebut momen factorial ke-k. Hogg, Robert V, Allen T. (1978)

4. Fungsi Pembangkit Momen

Hogg, Robert V, Allen T. (1978), menyatakan, Salah satu bentuk ekspektasi matematika lain adalah “fungsi pembangkit momen (*moment generating function*)” yang merupakan ekspektasi matematika khusus, yang disingkat dengan “fpm” yang didefinisikan sebagai berikut ;

Definisi 1.
Misalkan X adalah variable random yang didefinisikan pada **A.** Fungsi $M_X(t) = E(e^{tX})$ ada, dimana –h < t < h dan h > 0, dinotasikan $M(t) = M_X(t)$. Jika $E(e^{tX})$ tidak ada, maka $E(e^{tX})$ dapat ditentukan, $E(e^{tX})$ disebut fungsi pembangkit karakteristik yang didefinisikan
$\Phi_X = E(e^{tX})$, i = bilangan imajiner.
Jadi, jika X adalah variable random diskrit, maka,
$M_X(t) = \sum_{x \in A} E(e^{tx}) f(x)$

V.1. FPM Distribusi Binomial
Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976), mengemukakan, andaikan suatu percobaan (trial) dilakukan secara berulang-ulang sehingga menghasilkan sebanyak n percobaan, misalnya munculnya suatu kejadian (event) adalah sukses dan tidak munculnya suatu kejadian tersebut adalah gagal, dan misalkan pula.

p = probabilitas sukses
q = probabilitas gagal

dan tentu saja p ≠ q = 1. Dengan pengamsumsian bahwa percobaan-percobaan adalah saling bebas (independent) dan probabilitas sukses p adalah sama dalam setiap percobaan. Jumlah sukses dalam n percobaan boleh jadi 0, 1, 2, … , x, …, n. dan misalkan yang akan ditentukan adalah probabilitas bahwa jumlah sukses (variate) mengambil harga tertentu, sebut x. Maka probabilitas percobaan sampel x sukses dan n – x gagal, yaitu barisan sukses dan gagal,

$$\underbrace{SSS\ldots S}_{x}\underbrace{TTT\ldots T}_{n-x}$$

dimana S adalah menyatakan satu sukses dan T menyatakan satu gagal (tidak sukses) dapat diasumsikan dalam table berikut;

Table .4 Probabilitas Percobaan Sampel x sukses dan n – x gagal

Harga x	0	1	2	…	n
Probabilitas hasil	$(1-p)^n$	$p(1-p)^{n-1}$	$P^2 (1-p)^{n-2}$	…	p^n
Banyak Hasil	$\binom{0}{n}$	$\binom{1}{n}$	$\binom{2}{n}$	…	$\binom{n}{n} = 1$

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)

Jadi $p^x q^{n-x}$ merupakan probabilitas untuk x sukses dan n-x gagal bila terjadi dalam setiap urutan sukses-gagal diatas. Tetapi diinginkan dalam setiap x percobaan selalu sukses dan karena x percobaan dapat dipilih dari n dalam $\binom{n}{x}$ cara yang saling lepas (mutually exclusive), maka probabilitas $P(X = x)$ dari x sukses dalam suatu deretan n percobaan yang saling lepas diberikan dalam table berikut ;

Table 5. Probabilitas $P(X = x)$ dari x sukses

x	0	1	…	n
P(X=x)	$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n$	$\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}$	…	$\binom{n}{n} p^n (1-p)^0$

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)

Jadi distribusi probabilitasnya diperoleh,
$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, x = 0,1,...,n

disebut distribusi probabilitas (fkp) Binomial dengan n trial. Fkp binomial dinotasikan dengan b(x;n,p) atau ditulis X∽b(n,p) dan memenuhi :

1) P(X=x) > 0

2) $\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$= (p + q)^n = 1$

FBM dari distribusi binomial

$M_X(t) = E(e^{tx})$

$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{tx} p^x q^{n-x}$

$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x q^{n-x}$

$M_X(t) = (q + e^t p)^n$

V.2. FPM Distribusi Binomial Negatif

Sheldon Ross, (2010). Mengemukakan, Pandang suatu deretan yang independent dari percobaan random dengan probabilitas p sukses. Misalkan X menyatakan banyaknya gagal dalam deretan yang terjadi sebelum sukses ke-n. X + n adalah banyaknya trial yang diperlukan untuk mendapatkan n sukses, n ≥1. Maka X + n -1 adalah banyaknya trial yang diperlukan untuk mendapatkan n-1 sukses. Kenyataan ini dapat diasumsi dalam tabel berikut;

Tabel 6. Distribusi Probilitas Binomial Negatif

Banyaknya Trial	1 2 3 ... X+n-1	X +n
P(X=x)	$\binom{x+n-1}{n-1} p^{n-1} q^x$	p

Sehingga perkalian dari dua probabilitas ini diperoleh :

$P(X=x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x$; x = 0,1,2,...

P(X=x) disebut distribusi probilitas Binomial Negatif. Fkp Binomial Negatif dinotasikan dengan X∽NB(n,p) dan memenuhi :

1) P(X=x) > 0

2) $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)$

$= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{X+n-1}{n-1} p^n q^x$

$= \frac{p^n}{(1-q)^n} = 1$

Jadi fkp Binomial dapat diperoleh menjadi,

$P(X = x) = \binom{-n}{x} p \ (q)^x$: x = 0,1,...

= ...

$= (1 - qe^t)^{-n} p^n$

$M_X(t) = \frac{p^n}{(1-qe^t)^n}$

Jadi, bila X∽NB(n,p), maka,

$f(x) = \binom{X+n-1}{n-1} p^x (p)^n q^x$, x = 0,1,...,n

$M_X(t) = \frac{p^n}{(1-qe^t)^n}$

$E(X) = \frac{nq}{p}$

$E(X^2) = n(n+1)\, p^2 + np,$

$\sigma^2 = \frac{nq}{p^2}.$

V.3. FPM Distribusi Geometrik

Sheldon Ross, (2010). Mengemukakan, Misalkan percobaan independen, masing-masing memiliki probabilitas p, 0 < p < 1, untuk sukses, dilakukan sampai sukses terjadi. Jika X diambil sama dengan jumlah percobaan yang diperlukan, maka

$P\{X = n\} = (1-p)^{n-1} p$, n = 1, 2, ... (1)

Karena Persamaan (1), maka agar X sama dengan n, dilakukan percobaan pertama n-1 gagal dan percobaan ke-n sukses. Persamaan (1) maka, karena hasil dari percobaan berturut-turut diasumsikan independen.

Karena

$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{(1-(1-p))} = 1$ Sheldon Ross, (2010)

maka, dengan probabilitas 1, kesuksesan akhirnya akan terjadi. Setiap variabel acak X yang fungsi kepadatan peluangnya diberikan oleh Persamaan (1) dikatakan sebagai variabel acak geometrik dengan parameter p.

Dari fkp binomial negatif,

$P(X=x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x$; x = 0,1,2,..., dan n >0, khususnya untuk n = 1, maka

$P(X=x) = \binom{x}{0} pq^x$

$P(X=x) = pq^x$, x = 0,1,2,..., persamaan ini disebut distribusi Geometrik dan dinotasikan dengan X ∽NB(1,p), memenuhi ;

1) P(X=x) > 0

2) $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} pq^x$

$= p \sum_{x=0}^{\infty} q^x$

$= p \frac{1}{1-q}$

$= 1$

FPM Distribusi Geometrik

$M_X(t) = E(e^{tx})$

$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, pq^x$

$= p \sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x$

$= p(1 + qe^t + (qe^t)^2 + \ldots)$: jumlah deret geometrik ∽

$M_X(t) = p(\frac{1}{1-qe^t})$.

Jadi, bila X∽NB(1,p), maka,

$f(x) = pq^x$; x = 0,1,2,...

$M_X(t) = p(\frac{1}{1-qe^t})$.

$E(X) = \frac{q}{p}$

$E(X^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$

$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$

V.4 FPM Distribusi Poisson

Sheldon Ross, (2010). Mengemukakan, Distribusi binomial mengambil suatu bentuk yang sangat diinginkan dalam kasus pembatasan: bila p (atau q) sangat kecil dan mendekati nol dan n besar serta jumlah rata- rata sakses np (atau nq) = λ merupakan suatu konstanta. Kassus ini akan diuraikan dibawah ini sebagai berikut. Dalam distribusi Binomial, probabilitas dari x sukses diberikan dengan

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x}$, x = 0,1,...

Jika λ = np dibuat konstan, n besar dan p mendekati nol, maka p = λ/n untuk n = 1,2,..., sehingga varians σ^2 akan mendekati harga konstan $\sigma^2 = \lambda$.

Jadi P(X=x) ini dapat ditulis dengan,

$P(X=x) = \frac{n!}{(n-\chi)!\,\chi!} (\frac{\lambda}{n})^{\chi} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-\chi}$

$= \frac{\lambda^x}{x!} (1 - \frac{\lambda}{n})^n \cdot \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}}{n^x} \cdot \frac{n!}{(n-x)!}$

Dengan mengambil limit untuk n ⟶∽, diperoleh :

$\lim_{n\to\backsim} P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-x} \cdot \lim_{n\to\backsim} (\frac{1}{n^x} \cdot \frac{n!}{(n-x)!})$

Selanjutnya, formula stirling digunakan untuk harga n! yaitu,

$n! \backsim \sqrt{2\pi}\ e^{-n}\, n^{n+1/2}$

Dimana e adalah basis kaperian dengan e =2,71828,,, sehingga

$\lim_{n\to\backsim} P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-x} \cdot \lim_{n\to\backsim} (\frac{1}{n^x} \cdot \frac{n!}{(n-x)!})$

$\lim_{n\to\backsim} P(X = x) =$

$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!\, e^x} \lim_{n\to\backsim} (\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{n^x \sqrt{2\pi}\, e^{-n+x}\ (n-x)^{n-x+\frac{1}{2}}})$

$= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!\, e^x}\ e^x$

$\lim_{n\to\backsim} P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, dimana x finite.

Perubahan dari 0,1,2,... sukses dalam barisan berhingga adalah,

$e^{-\lambda}, \lambda e^{\lambda}, \frac{e^2 e^{-\lambda}}{2!}, \ldots$

Dengan kata lain variabel perubahan, jumlah sukses mengambil harga-harga 0,1,2, ..., x, ... dengan probabilitas yang bersesuaian adalah

$e^{-\lambda}, \lambda e^{\lambda}, \frac{e^2 e^{-\lambda}}{2!}, \ldots, \frac{e^x e^{-\lambda}}{x!}, \ldots$

Distribusi probabilitas dari jumlah sukses dengan asumsi tersebut dapat ditulis menjadi :

$P(X=x) = \frac{e^x e^{-\lambda}}{x!}$; x = 0,1,2, ...

Persamaan ini disebut distribusi poisson dinotasikan dengan X∽P(λ) dan memenuhi :

1) P(X=x) > 0

2) $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^x e^{-\lambda}}{x!}$

$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^x}{x!}$

$= 1$

Sheldon Ross, (2010).

1) FPM distribusi poisson

$M_X(t) = E(e^{tx})$

$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, P(X = x)$

$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}, \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Jadi, bila X∽P(λ), maka

f(x) $= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ X = 0,1,2,...

M(t) $= e^{\lambda(e^t-1)}$
E(X) = λ
$\sigma^2 = \lambda$

V.5 FPM Distribusi Trinomial

Hogg, Robert V, Allen T. (1978), menyatakan, Distribusi probabilitas binomial dapat digeneralisasikan pada distribusi probabilitas yang lebih dari satu variabel random. Jika n adalah bilangan integer positif dan a1,a2,a3, adalah konstanta, maka

$= \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\, x_2!(n-x_1-x_2)!}\ a_1^{x_1}\, a_2^{x_2}\, a_3^{n-x_1-x_2}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\, a_1^{x_1}}{x_1!(n-x_1)!}\ \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}\ a_2^{x_2}\, a_3^{n-x_1-x_2}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\, a_1^{x_1}}{x_1!(n-x_1)!}\ (a_2 + a_3)^{n-x_1}$

$= (a_1 + a_2 + a_3)^n$ Hogg, Robert V, Allen T. (1978)

Misalkan fungsi gabungan $f(x_1,x_2)$ adalah $f(x_1,x_2) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!(n-x_1-x_2)!}\ p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}$

dimana x1 dan x2 adalah integer non negatif dan x1 + x2 ≤ n, p1, p2, p3 adlah probabilitas-probabilitas dengan p1 + p2 + p3 = 1. Dan andaikan $f(x_1,x_2) = 0$, untuk x1,x2 lainnya. $f(x_1,x_2)$ adalah fkp gabungan dari dua variabel random x1, dan x2 disebut distribusi Trinomian dengan persamaan sbb;

$f(x_1,x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

$= \frac{n!}{x_1!\, x_2!(n-x_1-x_2)!}\ p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}$

Hogg, Robert V, Allen T. (1978)

Dan memenuhi :

1) $f(x_1,x_2) > 0$

2) $\sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} P(X1 = x1, X2 = x2) = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\, x_2!(n-x_1-x_2)!}\ p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\, p_1^{x_1}}{x_1!\,(n-x_1)!}\ \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!}\ p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\, p_1^{x_1}}{x_1!(n-x_1)!}\ (p_2 + p_3)^{n-x_1}$

$= (p_1 + p_2 + p_3)^n$

$= 1$ Hogg, Robert V, Allen T. (1978)

FPM distribusi trinomial

$M(t_1,t_2) = E(e^{\,t_1x_1 + t_2x_2})$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{e^{\,t_1x_1+t_2x_2}\, n!}{x_1!\, x_2!(n-x_1-x_2)!}\ p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{n-x_1-x_2}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\,(p_1e^{\,t_1})^{x_1}}{(x_1-1)!\,(n-x_{1-1})!}\ (\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!(p_2e^{\,t_2})^{x_2}}{(x_{2-1})!(n-x_1-x_2)!}$

$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!\,(p_1e^{\,t_1})^{x_1}}{(x_1-1)!\,(n-x_{1-1})!}\ (p_2e^{\,t_2} + p_3)^{n-x_1}$

$M(t_1,t_2) = (p_1e^{\,t_1} + p_2e^{\,t_2} + p_3)^n$

V.6 FPM Distribusi Multinomial

Spiegel, R Murray, (2013). Mengemukakan. Misalkan Distribusi pada peristiwa A_1, A_2, . . . , A_k adalah saling eksklusif, dan dapat terjadi dengan probabilitas masing-masing p_1, p_2, . . . , p_k dimana jika, X_1, X_2, . . . , X_k adalah adalah variabel acak dari masing-masing percobaan A_1, A_2, . . . , A_k pada n percobaan, sehingga,

$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n}{n1!n2!\ldots nk!}\, p_1^{n}\, p_k^{n1}\, p_k^{n2} \ldots p_k^{nk}$

Dimana $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, adalah fungsi probabilitas gabungan untuk variabel acak X_1 , X_2 , . . . , X_k. Distribusi ini, yang merupakan generalisasi dari distribusi binomial, disebut distribusi multinomial karena (2) adalah istilah umum dalam ekspansi multinomial dari
$(p_1 + p_2 + ... + p_k = n)^n$

FPM distribusi multinomial

$M(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) =$
$E(e^{\,t_1n_1+\,t_2n_2+\cdots+t_{k-1}n_{k-1}})$
$=$
$\sum_{n_j}(e^{\,t_1n_1+\,t_2n_2+\cdots+t_{k-1}n_{k-1}}\ \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}\ p_1^{n_1} \dots p_{k-1}^{n_{k-1}}\, p_k^{n_k}$
$=$
$\sum_{n_j}(\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}\ (p_1e^{t_1})^{n_1} \dots (p_{k-1}e^{t_{k-1}})^{n_{k-1}}\, p_k^{n_k})$
$=(\,p_1e^{t_1}+ \dots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$
Spiegel, R Murray, (2013)

Jadi, bila X berdistribusi Multinomial dengan paramater r, P_1,P_2, ... , $P_k > 0$ dan $P_1 + P_2 + ... + P_k = 1$, maka

$P(X_1{=}n_1, X_2{=}n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$
$p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$: $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$
$M(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) =(\,p_1e^{t_1}+ \dots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$

$E(X_k) = n\,p_k$
$E(X_k^2) = n(n-1)p_k^k + np_k^k$
$E(X_jX_k) = n(n-1)\,p_jp_k$; $j \neq k$
$\sigma_k^2 = np_k((1-p_k)$

D. Kesimpulan dan Saran

Dari hasil pembahasan diperoleh Fungsi Pembangkit Momen dari distribusi probabilitas diskrit sebagai berikut;

No.	Moment generating function	Model
1	Distribusi Binomial	$M_X(t) = (q + pe^t)^n$
2	Distribusi Binomial Negatif	$M_X(t) = \frac{p^n}{(1-qe^t)^n}$
3	Distribusi Geometrik	$M_X(t) = p(\frac{1}{1-qe^t})$.
4	Distribusi Poisson	$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$
5	Distribusi Trinomial	$M_X(t_1, t_2) = (p_1e^{\,t_1} + p_2e^{\,t_2} + p_3\ )^n$
6	Distribusi Multinomial	$M_X(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) =(\,p_1e^{t_1}+ \dots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$

E. Daftar Pustaka

Hogg, Robert V, Allen T. (1978)., *Introduction to Mathematical Statistics*, Fourth Edition, Macmillan Publishing co., inc., New York.

Kapur, J.N dan Saxena, H.C. (1976)., *Mathematical Statistics*, eight Edition, S. Chand dan Campany LTD, New Delhi.

Lederman W. (1981)., *Probability*, Volume II, Hand Book of Applicable Mathematics., A Wiley-Interscience Publication John Wiley & son's Chicester Net Work-Brisbane-Toronto.

Nazariah, Noviyanti, Dita Kurniawati, Roni Priyanda, Khairul Alim, Joni Wilson Sitopu, Joko Sabtohadi, Nurul Hidayah, P.A. (2022) 'Statistik Dasar', in *statistik dasar*. 1st edn. PT Get Press.

Sheldon Ross, (2010). A FIRST COURSE IN PROBABILITY, Eighth Edition. University of Southern California. Pearson Education Upper Saddle River, New Jersey.

Sitopu. Joni Wilson, (1990). *Fungsi Pembangkit momen dari beberapa distribusi probabilitas*. Prodi Matematika FMIPA USU Medan.

Spiegel, Murray R, Ph.D. (2013)., Probability and Statistics. Schaum's outline series, Fourth Edition, McGraw-HILL Book Company NetWork.